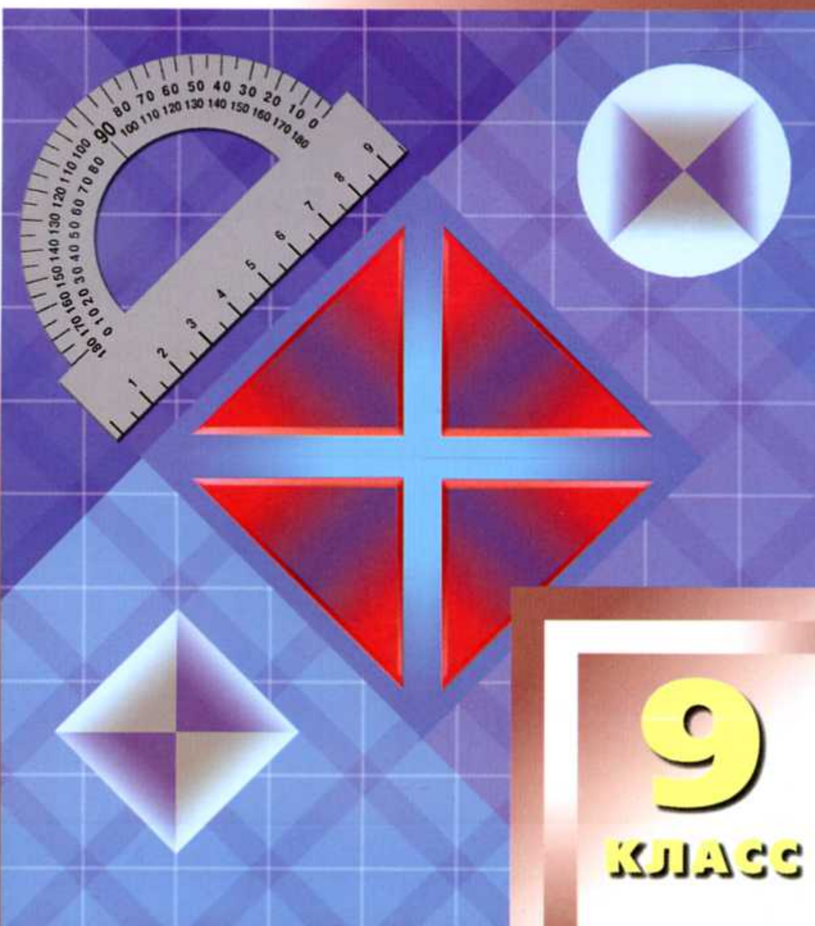
ФГОС

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Н.Ф. ГАВРИЛОВА

# ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ
## ПО ГЕОМЕТРИИ

*к УМК Л.С. Атанасяна и др.*



**9 КЛАСС**

ФГОС В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Н.Ф. ГАВРИЛОВА

# ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

## ПО ГЕОМЕТРИИ

*к УМК Л.С. Атанасяна и др.*
*(М.: Просвещение)*

НОВОЕ ИЗДАНИЕ

**9 класс**

МОСКВА • «ВАКО» • 2018

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Г12

**Гаврилова Н.Ф.**

Г12 Поурочные разработки по геометрии. 9 класс. – М.: ВАКО, 2018. – 384 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-03696-7

В данном пособии учитель найдет все, что необходимо для подготовки к урокам: подробные поурочные разработки, методические советы и рекомендации, тексты самостоятельных и контрольных работ, тестовые задания, дополнительные задачи по каждой теме, задачи повышенной сложности. Особенностью пособия является дифференцированный подход к планированию, позволяющий проводить уроки в классах разного профиля и уровня подготовки. Издание содержит справочные материалы, обобщающие таблицы и карточки для индивидуальной работы.

Пособие адресовано прежде всего учителям, работающим с учебным комплектом Л.С. Атанасяна и др. (М.: Просвещение). Полноценно может использоваться практически со всеми учебниками для основной школы.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-03696-7 © ООО «ВАКО», 2018

# От автора

Предлагаемое вам пособие представляет собой переработанное и дополненное в соответствии с требованиями ФГОС издание подробных поурочных планов по геометрии для 9 класса, ориентированное прежде всего на работу с учебным комплектом:

- *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др.* Геометрия. 7–9 классы. Учебник для общеобразовательных организаций. М.: Просвещение.
- *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др.* Геометрия. 9 класс. Рабочая тетрадь. М.: Просвещение.

Перед автором была поставлена задача – максимально обеспечить подготовку учителя к уроку и организацию работы на уроке.

В данной книге учитель сможет найти подробные поурочные разработки, методические советы и рекомендации, тексты самостоятельных и контрольных работ, тестовые задания, дополнительные задачи по каждой теме, задачи повышенной сложности. Практически все задачи, проверочные работы сопровождаются указаниями для обучающихся, ответами и краткими или подробными решениями для экономии времени учителя при подготовке к уроку, для эффективной работы над ошибками, организации дифференцированной работы.

Уроки включают различные виды деятельности обучающихся: практическую работу, работу в парах и группах, самостоятельную работу с использованием различных форм проверки.

Планирование предусматривает достижение не только предметных результатов, но и личностных (формирование представлений о математике как о части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие логического и критического мышления, умения работать в группе, команде; уважение мнения товарищей) и метапредметных (умения анализировать и осмысливать текст задачи, извлекать из текста необходимую информацию, моделировать с помощью схем, рисунков, реальных предметов, строить логическую цепочку, оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль, доказывать и опровергать утверждения с помощью контрпримеров, классифицировать, исследовать простейшие закономерности).

Пособие будет полезно в первую очередь начинающему учителю, который сможет позаимствовать полностью предлагаемые сценарии уроков, а также опытному педагогу для использования их частично, встраивая в собственный план урока.

Для удобства работы предлагается почасовое тематическое планирование учебного материала в соответствии с данным пособием, а также в начале каждой главы курса дается выписка из тематического планирования учебного материала программы для общеобразовательных школ.

Поурочные разработки в своей основе ориентированы на организацию работы класса по технологии дифференцированного обучения. Каждый урок начинается с организационного момента, сообщения темы и целей урока. Практически в каждом сценарии урока присутствуют задачи на готовых чертежах. Наличие уже готовых рисунков поможет учителю наиболее рационально использовать рабочее время на уроке. Эти задачи решаются, как правило, устно, но по мере необходимости можно порекомендовать учащимся записать краткое решение задачи. Тестовые задания позволяют своевременно выявить затруднения учащихся и предупредить устойчивые пробелы в их знаниях.

В пособии достаточно дополнительных задач для работы с одаренными учащимися, которые также можно использовать в качестве задач для организации внеурочной деятельности по предмету.

Контрольные и самостоятельные работы даны в трех уровнях сложности, что позволяет осуществить дифференцированный контроль. Первый уровень соответствует обязательным программным требованиям, второй – среднему уровню сложности, задания третьего уровня предназначены для учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в классах и школах повышенного уровня. Для каждого уровня приведено два расположенных рядом равноценных варианта. Практически все самостоятельные и контрольные работы сопровождаются решениями, указаниями для учащихся или ответами для эффективной организации работы над ошибками.

Тестовые задания позволяют своевременно выявить затруднения учащихся и предупредить устойчивые пробелы в их знаниях, экономя при этом время учителя. В целях экономии времени при проверке знаний обучающихся возможно использование тестовых работ из издания:

- Контрольно-измерительные материалы. Геометрия. 9 класс / Сост. А.Н. Рурукин. М.: ВАКО, 2017.

Все поурочные разработки, содержащиеся в данном пособии, являются примерными. В зависимости от степени подготовленности и уровня развития как целого класса, так и конкретных учащихся учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в саму структуру урока, включая подбор заданий для организации классной, самостоятельной и домашней работы.

К каждой главе даны обобщающие сведения (см. Приложение), являющиеся небольшим справочником по теоретическому материалу, позволяющие систематизировать базовый уровень теоретических знаний у учащихся. Такие таблицы могут быть использованы в качестве раздаточного материала на обобщающих уроках, на уроках подготовки к контрольной работе, при проведении работы над ошибками и т. д.

Для закрепления изученного материала рекомендуется использовать рабочие тетради (в главе IX идет ссылка на рабочую тетрадь для 8 класса). При этом наиболее подготовленным учащимся можно предлагать для решения только сложные задачи из рабочих тетрадей, а большую часть времени посвятить решению дополнительных задач повышенной сложности.

*Примечание:* знаком * в самостоятельных и контрольных работах обозначены задания повышенного уровня сложности.

## Тематическое планирование учебного материала (2 ч в неделю, всего 70 ч)

| № урока | Тема урока |
|---|---|
| 1, 2 | Вводное повторение |
| **Глава IX. Векторы (12 ч)** | |
| 3 | Понятие вектора |
| 4 | Откладывание вектора от данной точки |
| 5 | Сумма двух векторов |
| 6 | Сумма нескольких векторов |
| 7 | Вычитание векторов |
| 8 | Решение задач по теме «Сложение и вычитание векторов» |

| № урока | Тема урока |
|---|---|
| 9, 10 | Умножение вектора на число |
| 11 | Применение векторов к решению задач |
| 12 | Средняя линия трапеции |
| 13 | Подготовка к контрольной работе по теме «Векторы» |
| 14 | Контрольная работа № 1 по теме «Векторы» |
| **Глава X. Метод координат (10 ч)** | |
| 15 | Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам |
| 16 | Координаты вектора |
| 17, 18 | Простейшие задачи в координатах |
| 19 | Решение задач методом координат |
| 20 | Уравнение окружности |
| 21 | Уравнение прямой |
| 22 | Решение задач по теме «Уравнение окружности и прямой» |
| 23 | Подготовка к контрольной работе по теме «Метод координат» |
| 24 | Контрольная работа № 2 по теме «Метод координат» |
| **Глава XI. Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов (14 ч)** | |
| 25—27 | Синус, косинус и тангенс угла |
| 28 | Теорема о площади треугольника |
| 29 | Теоремы синусов и косинусов |
| 30, 31 | Решение треугольников |
| 32 | Измерительные работы |
| 33 | Обобщение по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника» |
| 34 | Скалярное произведение векторов |
| 35 | Скалярное произведение в координатах |
| 36 | Применение скалярного произведения векторов при решении задач |
| 37 | Подготовка к контрольной работе по теме «Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов» |
| 38 | Контрольная работа № 3 по теме «Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов» |
| **Глава XII. Длина окружности и площадь круга (12 ч)** | |
| 39 | Правильный многоугольник |
| 40 | Окружность, описанная около правильного многоугольника и вписанная в правильный многоугольник |
| 41 | Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности |

| № урока | Тема урока |
|---|---|
| 42 | Решение задач по теме «Правильный многоугольник» |
| 43 | Длина окружности |
| 44 | Решение задач по теме «Длина окружности» |
| 45 | Площадь круга и кругового сектора |
| 46 | Решение задач по теме «Площадь круга и кругового сектора» |
| 47 | Обобщение по теме «Длина окружности. Площадь круга» |
| 48 | Решение задач по теме «Длина окружности и площадь круга» |
| 49 | Подготовка к контрольной работе по теме «Длина окружности и площадь круга» |
| 50 | Контрольная работа № 4 по теме «Длина окружности и площадь круга» |
| **Глава XIII. Движения (9 ч)** | |
| 51 | Понятие движения |
| 52 | Свойства движений |
| 53 | Решение задач по теме «Понятие движения. Осевая и центральная симметрии» |
| 54 | Параллельный перенос |
| 55 | Поворот |
| 56 | Решение задач по теме «Параллельный перенос. Поворот» |
| 57 | Решение задач по теме «Движения» |
| 58 | Подготовка к контрольной работе по теме «Движения» |
| 59 | Контрольная работа № 5 по теме «Движения» |
| **Глава XIV. Начальные сведения из стереометрии (5 ч)** | |
| 60 | Призма |
| 61 | Объем и площадь поверхности многогранника |
| 62 | Пирамида |
| 63 | Цилиндр и конус |
| 64 | Сфера и шар |
| **Повторение (6 ч)** | |
| 65 | Повторение по темам «Начальные геометрические сведения», «Параллельные прямые» |
| 66 | Повторение по теме «Треугольники» |
| 67 | Повторение по теме «Окружность» |
| 68 | Повторение по темам «Четырехугольники», «Многоугольники» |
| 69 | Повторение по темам «Векторы», «Метод координат», «Движения» |
| 70 | Контрольная работа № 6 (итоговая) |

# ВВОДНОЕ ПОВТОРЕНИЕ

***Формируемые УУД: предметные:*** повторить наиболее важные теоретические сведения из курса геометрии 8 класса: теорему Пифагора, свойства медиан, биссектрис, высот треугольника, средней линии треугольника и трапеции, формулы для вычисления площадей треугольников и четырехугольников, свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции, теорию подобия треугольников, свойства отрезков хорд, касательных и секущих окружности, центральных и вписанных углов, вписанных и описанных окружностей; совершенствовать навыки решения задач на применение теоретических и практических знаний, умений и навыков, приобретенных в процессе изучения геометрии в 7 и 8 классах; повторить умение решать задачи на использование основных тем курса геометрии 8 класса; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал; извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; доказывать и опровергать утверждения, используя известные из курса геометрии 8 класса геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков; строить логические цепочки; оценивать полученный результат; осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры; понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

# Урок 1. Вводное повторение

***Основные дидактические цели урока:*** повторить основной теоретический материал курса геометрии 8 класса; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

– Назовите наиболее важные темы, с которыми вы познакомились в 8 классе.

### II. Актуализация знаний учащихся. Теоретический тест

(Задания теста учащиеся выполняют самостоятельно с использованием пп. 5–7, 10 Приложения (см. с. 372–378) с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справилось большинство учащихся. При необходимости учитель оказывает индивидуальную помощь учащимся, испытывающим затруднения.)

**Часть I**

Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение.

1. Сумма углов выпуклого $n$-угольника равна... .
2. Если $ABCD$ – параллелограмм (рис. 1), то:

а) $AO = ...,\ BO = ...$;
б) $\angle OAD = \angle ...$;
в) $AB = ...,\ BC = ...$;
г) $S_{ABO} = ...\ S_{ABCD}$;
д) $S_{ABCD} = ...\ \sin A$;
е) $AD \cdot BE = ...$ .

3. Если $ABCD$ – прямоугольник (рис. 2), то:

а) $AO = ...\ BD$;
б) $\angle A = \angle C = ...$;
в) $AC = \sqrt{... + CD^2}$;
г) $S_{AOD} = ...\ AB \cdot AD$.

4. Если $ABCD$ – ромб (рис. 3), то:

а) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot ...$;
б) $AO$ – биссектриса ...;
в) $AC\ ...\ BD$;
г) $BK\ ...\ BE$.

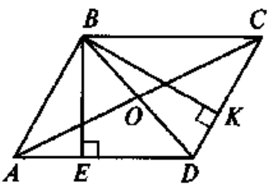


Рис. 1

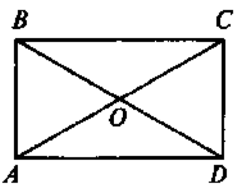


Рис. 2

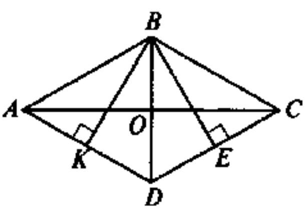


Рис. 3

5. В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle B = 90°$) $BD$ – высота (рис. 4), тогда:

а) $\ldots = \sqrt{x \cdot y}$;

б) $AB = \sqrt{x \cdot \ldots}$;

в) $BC = \sqrt{\ldots \cdot (x + y)}$;

г) $(x + y)^2 = \ldots$;

д) $\Delta ABD \sim \Delta \ldots$;

е) $\dfrac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \ldots$ .

6. В треугольнике $ABC$ $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 5).

$\dfrac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \dfrac{AD}{\ldots}$; $\dfrac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \dfrac{AB}{\ldots}$.

7. Рис. 6.

а) $AB \ldots AC$;

б) $AC \cdot AD = \ldots$;

в) $AB^2 = \ldots$;

г) $AO^2 = \ldots$ .

8. Рис. 7.

а) $\angle ADB = \ldots$;

б) $\angle AOC = \ldots \angle ADC$;

в) $\angle CDB = \dfrac{1}{2}\angle \ldots$;

г) $\angle DAB = \cup \ldots$ .

9. Если $\Delta ABC \sim \Delta MNK$ и $\dfrac{AB}{MN} = k$, то $\dfrac{P_{ABC}}{P_{MNK}} = \ldots$; $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \ldots$ .

10. Если точка $O$ – центр вписанной в треугольник окружности, то $O$ – точка... .

**Часть II**

Выберите верный ответ.

11. Если $KP = 11$ см (рис. 8), то:

а) $KE = EP = 5{,}5$ см;

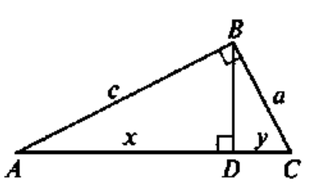


Рис. 4

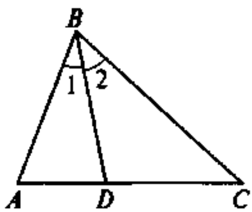


Рис. 5

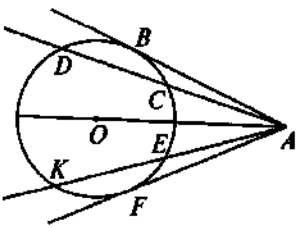


Рис. 6

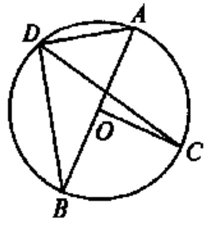


Рис. 7

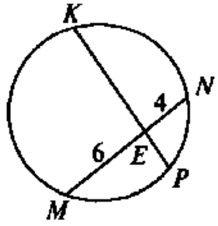


Рис. 8

б) $KE = 8$ см, $EP = 3$ см или
$KE = 3$ см, $EP = 8$ см.
в) $KE = 6$ см, $EP = 5$ см.

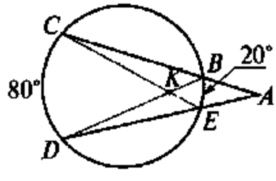


Рис. 9

12. $\angle A$ (рис. 9) равен:
а) 30°;
б) 50°;
в) 60°.

13. $\angle CKD$ (см. рис. 9):
а) 100°; б) 50°; в) 60°.

14. В $\Delta ABC$ $AA_1$ и $BB_1$ – медианы (рис. 10).
а) $CO = 4$ см, $C_1O = 2$ см, если $BB_1 = 6$ см;
б) $\frac{CO}{CC_1} = \frac{1}{2}$;
в) $S_{AOC_1} = \frac{1}{6} S_{ABC}$.

15. Если $O$ – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника $ABC$, то:
а) $O$ -- центр описанной окружности;
б) $O$ – центр вписанной окружности;
в) $O$ – точка пересечения медиан, биссектрис и высот треугольника $ABC$.

16. Если $O$ – центр вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности, то:
а) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$;
б) $AB + CD = BC + AD$;
в) $ABCD$ – квадрат.

17. Если $NP \parallel KE$ (рис. 11), то:
а) $\frac{MN}{MP} = \frac{NP}{KE}$; б) $\frac{NP}{KE} = \frac{NK}{PE}$; в) $\frac{MN}{MP} = \frac{NK}{PE}$.

18. Если $\Delta ABC$ – прямоугольный ($\angle C = 90°$) (рис. 12), то:
а) $\sin A = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

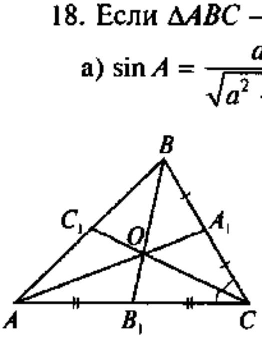


Рис. 10

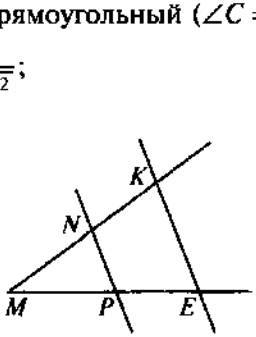


Рис. 11

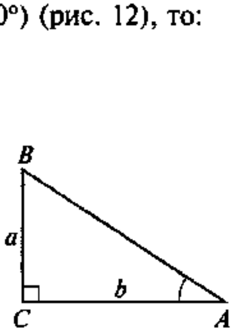


Рис. 12

б) $\cos A = \frac{b}{a}$;

в) $\operatorname{tg} A = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

19. Если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, то:

а) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$;

б) $\cos\alpha = \frac{8}{9}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{8}$;

в) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

20. Квадрат – это:

а) прямоугольник, у которого все углы равны;

б) ромб, у которого диагонали равны;

в) параллелограмм, у которого все углы прямые.

## III. Самопроверка ответов теста с последующей самооценкой

*Ответы к тесту:*

1. $180° \cdot (n - 2)$.

2. а) $AO = OC$, $BO = OD$; б) $\angle AOD = \angle OCB$; в) $AB = CD$; $BC = AD$; г) $S_{ABO} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$; д) $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin A$; е) $AD \cdot BE = CD \cdot BK$.

3. а) $AO = \frac{1}{2} \cdot BD$; б) $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°$; в) $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$; г) $S_{AOD} = \frac{1}{4}AC \cdot BD$.

4. а) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$; б) $AO$ — биссектриса $\angle BAD$; в) $AC \perp BD$; г) $BK = BE$.

5. а) $BD = \sqrt{x \cdot y}$; б) $AB = \sqrt{x \cdot (x + y)}$; в) $BC = \sqrt{y \cdot (x + y)}$; г) $(x + y)^2 = a^2 + c^2$; д) $\Delta ABD \sim \Delta BCD \sim \Delta ACB$; е) $\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{x}{y}$.

6. $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{CD}$; $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AB}{BC}$.

7. а) $AB = AC$; б) $AC \cdot AD = AE \cdot AK$; в) $AB^2 = AC \cdot AD$ (или $AE \cdot AK$); г) $AO^2 = OB^2 + AB^2$ (или $OC^2 + AC^2$).

8. а) $\angle ADB = 90°$; б) $\angle AOC = 2\angle ADC$; в) $\angle CDB = \frac{1}{2}\angle COB$; г) $\angle DAB = \frac{1}{2}\cup DB$.

9. $\frac{P_{ABC}}{P_{MNK}} = K$; $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = K^2$.

10. $O$ – точка пересечения биссектрис данного треугольника.

*Ответы к тесту:*

11 – б; 12 – а; 13 – б; 14 – в; 15 – а; 16 – б; 17 – в; 18 – а; 19 – в; 20 – б.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 18–20 баллов;
- оценка «4» – 14–17 баллов;
- оценка «3» – 10–13 баллов;
- оценка «2» – менее 10 баллов.

**IV. Решение задач по готовым чертежам**

(Учащиеся решают задачи в группах по 3–4 ученика. В тетрадях по необходимости выполняют рисунок и вносят туда результаты промежуточных вычислений. К простым задачам записывают только ответы. Учитель контролирует работу менее подготовленных групп и по мере необходимости оказывает помощь.)

*I уровень сложности:* задачи 1–9 (с последующей проверкой по готовым ответам и обсуждением решения).

*II уровень сложности:* задачи 7–15 (с последующей самопроверкой по готовым ответам).

1. *Дано:* $ABCD$ – квадрат (рис. 13).

*Найти:* $P_{AMCK}$, $S_{AMCK}$.

2. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 14).

*Найти:* $P_{ABO}$, $S_{ABO}$.

3. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник, $AB = 8$, $BC = 4$. $AK : AB = 3 : 8$; $CP : CD = 3 : 8$ (рис. 15).

*Найти:* $P_{DKBP}$, $S_{DKBP}$.

4. *Дано:* $ABCD$ – равнобедренная трапеция (рис. 16).

*Найти:* $S_{ABCD}$.

5. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 17).

*Найти:* $\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}}$.

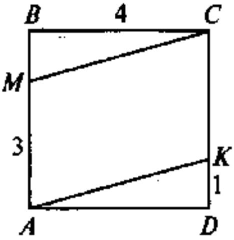



Рис. 13

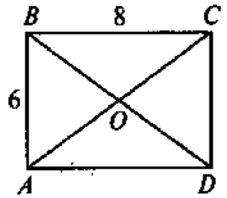



Рис. 14

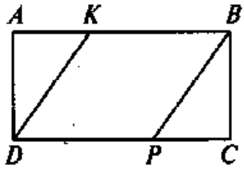



Рис. 15

6. *Дано:* $ABCD$ – трапеция. $KE \parallel BC$ (рис. 18).
*Найти:* $|ME - KM|$.
7. *Дано:* $ABCD$ – трапеция. $MK \parallel AD$, $AC = 12$ (рис. 19).
*Найти:* $NP$, $NO$.
8. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 20).
*Найти:* $P_{ABCD}$, $S_{ABCD}$.
9. Рис. 21.
*Найти:* $\angle AOC$, $P_{ABC}$.
10. *Дано:* $ABCD$ – трапеция (рис. 22).
*Найти:* $S_{ABCD}$.
11. Рис. 23.
*Найти:* $\angle BEC$.
12. Рис. 24. $AC = 13$.
*Найти:* $AM$, $MC$.
13. *Дано:* $AC : CD = 4 : 5$ (рис. 25).
*Найти:* $CD$.
14. Рис. 26.

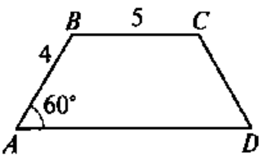



Рис. 16

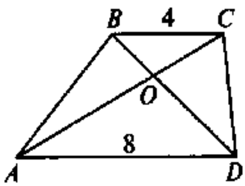



Рис. 17

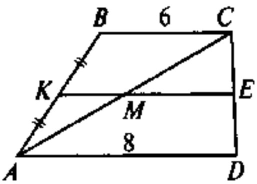



Рис. 18

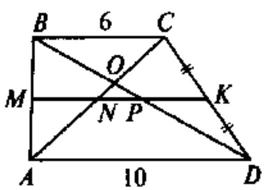



Рис. 19

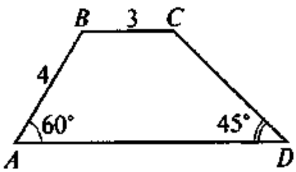



Рис. 20

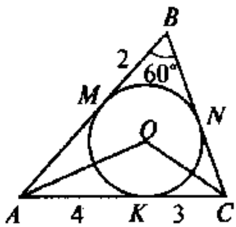



Рис. 21

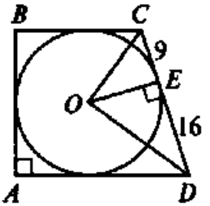



**Рис. 22**

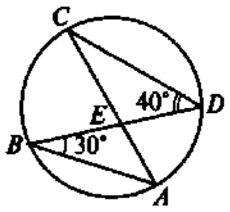



**Рис. 23**

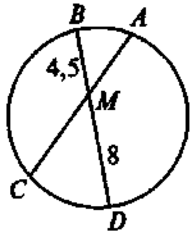



**Рис. 24**

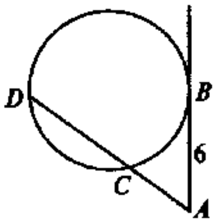



**Рис. 25**

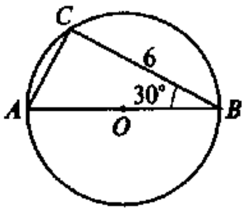



**Рис. 26**

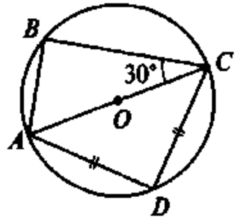



**Рис. 27**

*Найти:* $S_{ACO}$, $S_{BCO}$.

15. Рис. 27.

*Найти:* $\angle BAD$, $\angle BCD$.

***Ответы к задачам по готовым чертежам:***

1. $P = 16$; $S = 12$. 2. $P = 16$; $S = 12$. 3. $P = 20$; $S = 20$. 4. $S = 14\sqrt{3}$. 5. $S_{BOC} : S_{AOD} = \frac{1}{4}$. 6. $|ME - KM| = 1$. 7. $NP = 2$; $NO = 1{,}5$. 8. $P = 12 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$; $S = 8\sqrt{3} + 6$. 9. $\angle AOC = 120°$; $P_{ABC} = 18$. 10. $S = 588$. 11. $\angle BEC = 70°$. 12. 9 и 4. 13. $CD = 5$. 14. $S_{ACO} = S_{BCO} = 3\sqrt{3}$. 15. $\angle BAD = 105°$; $\angle BCD = 75°$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 2 балла.

- оценка «5» – 14–18 баллов;
- оценка «4» – 10–12 баллов;
- оценка «3» – 6–8 баллов;
- оценка «2» – менее 6 баллов.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение теоретического теста и за решение задач по готовым чертежам.)

## V. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

**Домашнее задание**

Решить задачи. I уровень сложности: задачи № 10–15 по готовым чертежам; II уровень сложности: дополнительные задачи № 1–4.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** В $\Delta MNK$ со сторонами $MN = 5$ см, $NK = 8$ см, $MK = 9$ см вписана окружность, касающаяся стороны $MK$ в точке $E$. Найдите расстояние от точки $E$ до точки $A$ биссектрисы $NA$ ($A \in MK$). Найдите отношение радиуса описанной около треугольника окружности к радиусу вписанной окружности.

*Ответ:* $EA = \frac{6}{13}$ см; $R : r = 5 : 3$.

***Задача 2.*** Хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $E$. $\angle AEC = 154°$, а дуга $CB$ составляет 30% дуги $AD$. Найдите $\angle CB$ и $\angle AD$.

*Ответ:* $\angle CB = 12°$; $\angle AD = 40°$.

***Задача 3.*** Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

*Ответ:* $4\frac{8}{13}$ см.

***Задача 4.*** Трапеция $ABCD$ ($BC$ и $AD$ – основания) вписана в окружность, $\angle A = 62°$. Найдите дуги, на которые вершины трапеции делят окружность, если дуга $AB$ равна 44°.

*Ответ:* 44°; 80°; 44°; 192°.

## Урок 2. Вводное повторение

***Основная дидактическая цель урока:*** совершенствовать навыки решения задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

(Ученики в парах проверяют домашнее задание по готовым ответам, при наличии ошибок проводят работу над ошибками.)

Фронтальная работа с классом.

Решить задачи № 1, 2.

***Задача 1.*** В прямоугольной трапеции один из углов равен 60°, а большая боковая сторона равна 8 см. Найдите основания трапеции и радиус вписанной в нее окружности.

*Решение:*

а) Проведем высоту $CH$ (рис. 28), тогда $\Delta CDH$ – прямоугольный треугольник с углом $C$, равным 30°, поэтому катет $HD$ равен половине гипотенузы $CD$, т. е. $HD = 4$ см.

Значит, по теореме Пифагора

$CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ см.

б) Так как окружность вписана в трапецию, то $AB + CD = BC + AD$. $AB = CH = 4\sqrt{3}$ см, так как $ABCH$ – прямоугольник.

$AB + CD = 4\sqrt{3} + 8$ см $\Rightarrow BC + AD = 4\sqrt{3+8}$ см.

$AD = AH + HD = AH + 4$ см.

$BC = AH \Rightarrow BC + AD = 2BC + 4 = 4\sqrt{3} + 8$ см $\Rightarrow BC = 2\sqrt{3+2}$ см, $AD = 2\sqrt{3+6}$ см.

в) Проведем высоту трапеции через центр $O$ окружности. Так как $MK \perp BC$ и $MK \perp AD$, то $OM$ и $OK$ – радиусы окружности, проведенные в точки касания $M$ и $K$, тогда $MO = \frac{1}{2}CH = 2\sqrt{3}$ см, т. е. радиус вписанной окружности равен $2\sqrt{3}$ см.

*Ответ:* Основания трапеции равны $2\sqrt{3} + 2$ см и $2\sqrt{3} + 6$ см; радиус вписанной окружности равен $2\sqrt{3}$ см.

***Задача 2.*** $MN$ и $MK$ – касательные к окружности с центром $O$ ($N$ и $K$ – точки касания). Найдите градусную меру дуги $NK$, если $OM = 8$ см, а хорда $NK$ делит отрезок $OM$ точкой $E$ в отношении 3 : 1, считая от точки $O$.

*Решение:*

а) Так как $MN$ и $MK$ – отрезки касательных, проведенных из точки $M$ (рис. 29), то $MN = MK$, $\angle 1 = \angle 2$, тогда $\Delta NME = \Delta KME$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle MEN = \angle MEK$. Но $\angle MEN + \angle MEK = 180°$, поэтому $OM \perp NK$.

б) $\Delta ONM \sim \Delta OEN$ по двум углам ($\angle ONM = \angle OEN = 90°$, $\angle O$ – общий), следовательно, $\frac{ON}{OF} = \frac{OM}{ON} \Rightarrow ON = \sqrt{OE \cdot OM}$.

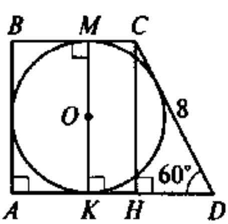


Рис. 28

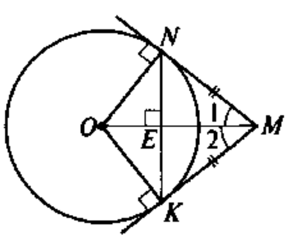


Рис. 29

$OM = 8$ см, $OE : EM = 3 : 1 \Rightarrow OE = \frac{3}{4}OM = 6$ см,

$ON = \sqrt{6 \cdot 8} = 4\sqrt{3}$ см.

в) В треугольнике $ONE$ $\cos\angle NOE = \frac{OE}{ON} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\angle NOE = 30° \Rightarrow \angle NOK = 60°$.

$\cup NK = \angle NOK = 60°$ или $\cup NK = 360° - \angle NOK = 300°$.

*Ответ:* 60° или 300°.

## III. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

*I уровень сложности:* задачи № 1–4.

*II уровень сложности:* задачи № 3–6.

***Задача 1.*** Отрезок $BD$ – диаметр окружности с центром $O$. Хорда $AC$ делит пополам радиус $OB$ и перпендикулярна к нему. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ и градусные меры дуг $AB$, $BC$, $CD$, $AD$.

*Решение:*

а) $\Delta OKC = \Delta OKA$ (рис. 30) по гипотенузе и катету ($\angle OKC = \angle OKA = 90°$, $OC = OA$ как радиусы, $OK$ – общая), так как $OK = \frac{1}{2}CO = \frac{1}{2}AO$, то $\angle KCO = \angle KAO = 30°$, тогда $\angle COK = \angle AOK = 60°$.

б) $\Delta COB$ и $\Delta AOB$ – равнобедренные ($CO = OB = OA$ как радиусы). $\angle COB = \angle AOB = 60°$, следовательно, $\angle OCB = \angle CBO = \angle OBA = \angle OAB = 60°$, тогда $\angle CBA = 120°$.

в) $\angle BCD = \angle BAD = 90°$ как углы, опирающиеся на диаметр $BD$.

г) Четырехугольник $ABCD$ – вписанный, тогда $\angle CBA + \angle CDA = 180°$, следовательно, $\angle CDA = 180°$, отсюда $\angle CDA = 180° - 120° = 60°$.

д) $\cup AB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

$\cup BC = \frac{1}{2}\angle COB = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

$\cup CD = \angle CBD = 60°$.

$\cup AD = \angle ADB = 60°$.

*Ответ:* $\angle ABC = 120°$, $\angle ADC = 60°$; $\angle BCD = \angle BAD = 90°$; $\cup AB = \cup BC = 30°$; $\cup CD = \cup AD = 60°$.

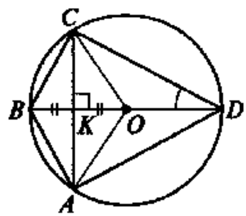



Рис. 30

***Задача 2.*** Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, боковая сторона равна 17 см. Найдите радиусы вписанной в него и описанной около него окружности.

*Решение:* $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{289 - 64} = 15$ см (рис. 31).

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$ см$^2$.

$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 120}{17+17+16} = \frac{24}{15} = 4\frac{4}{5}$ см;

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 120} = \frac{289}{30} = 9\frac{19}{30}$ см,

где $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника.

*Ответ:* 4,8 см; $9\frac{19}{30}$ см.

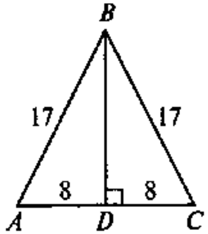


**Рис. 31**

***Задача 3.*** Диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, равна 10 см, а его площадь равна 48 см$^2$. Найдите радиус описанной окружности и стороны прямоугольника.

*Решение:*

а) Так как $AC$ – диагональ прямоугольника (рис. 32), $\angle ABC$ – прямой, то $AC$ – диаметр окружности, тогда радиус данной окружности равен половине $AC$, т. е. $AO = 5$ см.

б) $S_{ABCD} = 48$ см$^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$ см$^2$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK \Rightarrow BK = S_{ABC} : \left(\frac{1}{2}AC\right) = 4{,}8$ см.

в) В $\Delta ABC$ $\angle B = 90°$, $BK \perp AC \Rightarrow BK = \sqrt{AK \cdot KC}$.

Так как $AC = AK + KC = 10$ см $\Rightarrow$ $AK = 10 - KC \Rightarrow BK = \sqrt{(10 - KC) \cdot KC} \Rightarrow$ $(10 - KC) \cdot KC = (4{,}8)^2 \Rightarrow KC^2 - 10 \cdot KC + 23{,}04 = 0$.

$D = 102 - 4 \cdot 1 \cdot 23{,}04 = 7{,}84 \Rightarrow$ $KC = 3{,}6$ см или $KC = 6{,}4$ см, тогда

$BC = \sqrt{BK^2 - KC^2} = 6$ см, $AB = \frac{S_{ABCD}}{BC} = 8$ см или $BC = 8$ см, $AB = 6$ см.

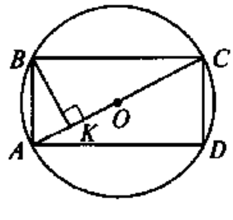


**Рис. 32**

*Ответ:* Стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см, радиус описанной окружности равен 5 см.

***Задача 4.*** Площадь четырехугольника $MNKP$, описанного около окружности радиуса 7 см, равна 182 см$^2$. Найдите стороны четырехугольника, если известно, что *PK* на 6 см больше *MN*, $NK : MP = 7 : 6$.

*Решение:* $S_{MNKP} = \frac{1}{2} P_{MNKP} \cdot r$, отсюда $P_{MNKP} = \frac{2 \cdot 182}{7} = 52$ см (рис. 33).

Четырехугольник *MNKP* описанный, значит, $MN + PK = NK + MP = 26$ см.

По условию *PK* на 6 см больше *MN*, т. е. $MN + MN + 6 = 26$, отсюда $MN = 10$ см, $PK = 16$ см.

$NK : MP = 7 : 6 \Rightarrow NK = \frac{7}{6} MP \Rightarrow \frac{7}{6} MP + MP = 26 \Rightarrow$ $MP = 12$ см, $NK = 14$ см.

*Ответ:* $MN = 10$ см; $PK = 16$ см; $MP = 12$ см; $NK = 14$ см.

***Задача 5.*** В трапеции *ABCD* диагонали равны, основания *BC* и *AD* равны 7 см и 9 см соответственно, а расстояние между ними – 8 см. Точки *M*, *N*, *K*, *P* – середины сторон трапеции. Найдите площадь четырехугольника *MNKP*.

*Решение:* Если в трапеции диагонали *AC* и *BD* равны (рис. 34), то $MN = NK = KP = MP$, так как $MN = \frac{1}{2} AC$, $PK = \frac{1}{2} AC$, $NK = \frac{1}{2} BD$, $MP = \frac{1}{2} BD$ как средние линии треугольников *ABC*, *ACD*, *BCD* и *ABD* соответственно, а также $MN \parallel PK \parallel AC$, $MP \parallel NK \parallel BD$, следовательно, *MNKP* – ромб.

$S_{MNKP} = \frac{1}{2} MK \cdot NP$, *MK* – средняя линия трапеции $\Rightarrow$ $MK = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(7 + 9) = 8$ см, $MK \parallel BC \parallel AD$.

Диагонали ромба перпендикулярны, т. е. $MK \perp NP$, так как $MK \parallel BC \parallel AD$, то $NP \perp BC$, $NP \perp AD$, т. е. *NP* – расстояние между прямыми *BC* и $AD \Rightarrow NP = 8$ см.

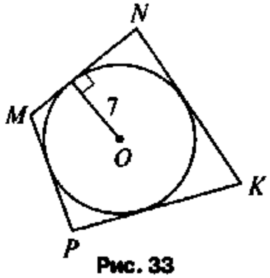


**Рис. 33**

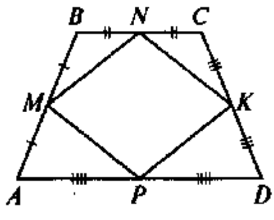


**Рис. 34**

$S_{MNKP} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$ см$^2$.

*Ответ:* 32 см$^2$.

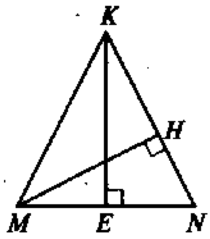


Рис. 35

***Задача 6.*** В треугольнике $MNK$ $MK = NK$, $\cos N = \frac{1}{3}$. Найдите отношение высот $MH$ и $KE$ треугольника $MNK$.

*Решение:* $MK = NK$ (рис. 35), следовательно, $\Delta MNK$ – равнобедренный.

$\cos N = \frac{1}{3}$, тогда в прямоугольном треугольнике $KEN$ $\cos N = \frac{NE}{KN} = \frac{1}{3} \Rightarrow KN = 3 \cdot NE$.

Так как высота $KE$ является медианой треугольника $MNK$, то $MN = 2 \cdot NE$.

$\Delta NKE \sim \Delta NMH$ по двум углам ($\angle N$ – общий, $\angle KEN = \angle MHN = 90°$) $\Rightarrow \frac{NK}{NM} = \frac{KE}{MH} \Rightarrow \frac{KE}{MH} = \frac{3NE}{2NE} = \frac{3}{2}$, т. е. $MH : KE = 2 : 3$.

*Ответ:* $MH : KE = 2 : 3$.

(После окончания самостоятельного решения задач выполняется самопроверка по готовым ответам.)

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три или четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допушены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

## IV. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учашихся.)

## Домашнее задание

Решить задачи.

***Задача 1.*** Радиусы двух окружностей, имеющих общий центр, относятся как 2 : 3. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и равна 20 см. Найдите радиусы окружностей.

*Ответ:* $6\sqrt{5}$ см; $4\sqrt{5}$ см.

***Задача 2.*** Стороны треугольника равны 15 см, 18 см и $b$ см. Какие значения может принимать $b$? При каком значении $b$ треугольник является прямоугольным?

*Ответ:* $3 < b < 33$; $b = 3\sqrt{11}$ см.

***Задача 3.*** В прямоугольной трапеции боковые стороны равны 17 см и 15 см, а меньшее основание в два раза меньше большего основания. Найдите площадь трапеции.

*Ответ:* 180 см$^2$.

***Задача 4.*** Круг радиуса 5 см касается трех сторон прямоугольника, одна из сторон которого равна 17 см. Найдите сумму расстояний от центра круга до вершин этого прямоугольника.

*Ответ:* $26 + 10\sqrt{2}$ см.

# Глава IX
# ВЕКТОРЫ

***Формируемые УУД: предметные:*** ввести понятие вектора как направленного отрезка; научить откладывать вектор, равный данному; ввести понятия суммы и разности векторов, умножения вектора на число; рассмотреть законы сложения векторов, свойства умножения вектора на число; научить решать задачи на применение теории векторов; ввести понятие средней линии треугольника; рассмотреть свойство средней линии треугольника; научить решать задачи на применение определения и свойства средней линии треугольника; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал; извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры; понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

## Урок 3. Понятие вектора

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия вектора, его начала и конца, нулевого вектора, длины вектора, коллинеарных, сонаправленных, противоположно направленных, равных векторов; научить учащихся изображать и обозначать векторы.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

— Как вы думаете, какие темы мы будем изучать в 9 классе?

(Учитель перечисляет основные темы.)

- Векторы.
- Метод координат.
- Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов.
- Длина окружности и площадь круга.
- Движения.
- Начальные сведения из стереометрии.

К концу учебного года каждому ученику необходимо подготовить проектную работу.

*Примерные темы.*

- Гармонические четверки точек.
- Симметрия в координатах.
- Парабола, гипербола и эллипс.
- Правильные и полуправильные многоугольники.
- Соотношения между сторонами и углами четырехугольника.
- Окружность Эйлера.
- Инверсия и ее основные свойства.

Проект нужно оформить в печатном виде и подготовить его презентацию. Лучшие работы будут рекомендованы для участия в школьной научно-практической конференции. Также рекомендуется в течение учебного года заслушать подготовленные проекты на уроках.

### II. Проверка домашнего задания

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

### III. Определение темы урока

(Ученики решают задачи на движение тел навстречу друг другу, движение тел в противоположных направлениях, движение тел в одну сторону с разными скоростями. Учитель подводит учеников к понятию вектора.)

***Задача 1.*** Из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 240 км, навстречу друг другу выехали мотоцикл и легковой автомобиль. Через какое время они встретятся, если скорость автомобиля равна 70 км/ч, а скорость мотоцикла — 50 км/ч?

***Задача 2.*** Из пункта $C$ в разных направлениях выехали два велосипедиста. Какое расстояние будет между велосипедистами через 3 ч, если скорости велосипедистов равны 12 км/ч и 15 км/ч?

***Задача 3.*** Из пункта $A$ в одном направлении выехали мотоциклист и велосипедист. Какое расстояние будет между велосипедистами через 2 ч, если скорости велосипедистов равны 14 км/ч и 45 км/ч?

(Учитель рисует на доске несколько векторов, различных по длине, направлению и взаимному расположению. Ученики устанавливают различия между ними. Учитель определяет тему и цель урока.)

### IV. Работа по теме урока

1. Ввести понятие вектора (направленного отрезка).
2. Изображение и обозначение вектора.
3. Ввести понятие нулевого вектора.
4. Ввести понятие длины вектора.
5. Коллинеарные векторы: сонаправленные и противоположно направленные.
6. Ввести понятие равных векторов.

(В ходе изучения темы можно использовать п. 8 Приложения (см. с. 377, 378).)

### V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях (8 класс).

Решить устно задачу № 112.

***Задача № 112***

***Ответ:***

а) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DA}$;

в) вектор с началом и концом в точке $C$ называется нулевым и обозначается $\overrightarrow{CC}$ или $\vec{0}$;

г) $|\overrightarrow{BC}| = 4$, $|\overrightarrow{BD}| = 4$;

д) вектору $\overrightarrow{BA}$ коллинеарен вектор $\overrightarrow{CD}$;

е) сонаправлены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$, противоположно направлены векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$.

ж) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, так как $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{BA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DA}$, так как $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ не сонаправлены; $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{BD}$, так как $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не сонаправлены; $\overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{AC}$, так как $|\overrightarrow{AO}| \neq |\overrightarrow{AC}|$; $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, так как $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$ и $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$;

з) $\overrightarrow{BA}$.

2. Решить устно задачу № 744.

3. Решить самостоятельно задачи № 740, 745 с последующим обсуждением.

4. Решить самостоятельно задачи № 738, 742.

(Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

5. Решить дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, $O$ – точка пересечения диагоналей. Прямая $m$ проходит через точку $O$, и пересекает стороны $BC$ и $AD$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Среди векторов $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$ найдите:

а) коллинеарные векторы;

б) сонаправленные векторы;

в) противоположные векторы;

г) равные векторы;

д) векторы, имеющие равные длины.

*Ответ:*

а) $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{DN}$; $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$;

б) $\overrightarrow{BM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{NC}$;

в) $\overrightarrow{DN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{DN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{DN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BM}$;

г) $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$;

д) $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{DN}|$; $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AN}|$; $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{NC}|$.

## VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте определение вектора. Как еще по-другому называют вектор?
2. Как на чертеже изображают векторы? Какие способы обозначения векторов существуют?
3. Какой вектор называется нулевым?
4. Что называют длиной вектора?
5. Какие векторы называются коллинеарными, сонаправленными, противоположно направленными?
6. Какие векторы называются равными?

## Домашнее задание

1. П. 79, 80, вопросы 1–5 (учебник, с. 208).
2. Решить задачи № 739, 741, 746, 747.
3. Решить дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, $K$ – середина $CD$, $AK$ пересекает прямую $BC$ в точке $M$.

Среди векторов $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{AB}$ укажите:

а) коллинеарные векторы;

б) сонаправленные векторы;

в) противоположно направленные векторы;

г) равные векторы;

д) векторы, имеющие равные длины.

*Ответ:*

а) $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KM}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CK}$;

б) $\overrightarrow{AK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KM}$;

в) $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CK}$; $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MC}$;

г) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KM}$;

д) $\left|\overrightarrow{AK}\right| = \left|\overrightarrow{KM}\right|$; $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right|$.

# Урок 4. Откладывание вектора от данной точки

***Основная дидактическая цель урока:*** научить учащихся откладывать вектор, равный данному.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задач № 746, 747.)

### III. Актуализация знаний учащихся

1. Фронтальная работа с классом (повторение теоретического материала предыдущего урока).

*ABCD* – параллелограмм (рис. 9.1).

*MNPQ* – трапеция (рис. 9.2).

– Назовите все векторы, изображенные на рисунке.

– Среди изображенных на рисунке векторов укажите:

а) коллинеарные;

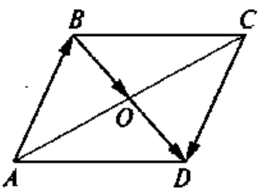



**Рис. 9.1**

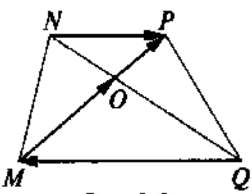



**Рис. 9.2**

б) сонаправленные;

в) противоположно направленные;

г) равные;

д) равные по модулю;

е) векторы, сонаправленные вектору $\overrightarrow{OO}$.

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно у доски.)

**I уровень сложности**

$PKEF$ – параллелограмм (рис. 9.3), $A$ и $B$ – середины $KE$ и $PF$ соответственно.

1. Запишите все векторы, изображенные на рисунке.
2. $\overrightarrow{PK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{FE}$. Почему?
3. $\overrightarrow{AE} \neq \overrightarrow{BF}$. Почему?
4. Равны ли векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{EB}$?
5. Равны ли векторы $\overrightarrow{PK}$ и $\overrightarrow{AP}$ по абсолютной величине?

**II уровень сложности**

$ABCD$ – квадрат, $AB = 4$ (рис. 9.4).

Заполните пропуски:

1. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ – ...;
2. $\overrightarrow{BC}$ ... $\overrightarrow{CD}$, так как ...;
3. $\left|\overrightarrow{AO}\right| = ...$;
4. $\overrightarrow{BO} \neq \overrightarrow{AO}$, так как ...;.
5. $\overrightarrow{CO} \neq \overrightarrow{CA}$, так как ...;
6. $\overrightarrow{DD} \uparrow\uparrow ...$, $\left|\overrightarrow{DD}\right| = ...$ .
7. Абсолютная величина вектора $\overrightarrow{BD}$ равна... .

**III уровень сложности**

$AB = BC = 17$, $AC = 16$, $M$, $N$, $K$ – середины сторон $AB$, $BC$, $AC$ соответственно (рис. 9.5).

1. Укажите векторы, равные вектору $\overrightarrow{MK}$.

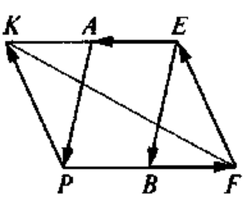



Рис. 9.3

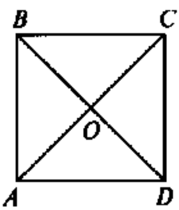



Рис. 9.4

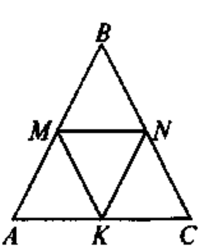



Рис. 9.5

2. Укажите векторы, равные 8 по абсолютной величине.

3. Укажите векторы, равные 8,5 по длине и неколлинеарные вектору $\overline{NK}$.

4. Найдите $|\overline{BK}|$.

5. Докажите, что не равны векторы:

а) $\overline{MK}$ и $\overline{NK}$; б) $\overline{MN}$ и $\overline{CK}$; в) $\overline{AB}$ и $\overline{KN}$.

## IV. Определение темы урока

(Учитель рисует вектор $\vec{a}$ и точку $A$ на карте какой-либо местности. Ученики решают задачу.)

***Задача.*** Из пункта $A$ выехал мотоциклист со скоростью, равной длине вектора $\vec{a}$, и в направлении, совпадающем с направлением вектора $\vec{a}$. Определите расположение мотоциклиста на местности через 1 ч пути.

(Учитель определяет тему и цель урока.)

## V. Работа по теме урока

1. Показать, как отложить вектор $\vec{a}$ от точки $A$.
2. Доказать, что от любой точки плоскости можно отложить вектор, равный данному.
3. Выполнить практическое задание № 743.

## VI. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях (8 класс).

Решить самостоятельно задачи № 113, 114.

(Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

***Задача № 113***

Рис. 9.6.

1) Постройте ненулевой вектор с началом в точке $O$:

а) коллинеарный вектору $\vec{a}$;

б) сонаправленный с вектором $\vec{b}$;

в) противоположно направленный вектору $\vec{c}$.

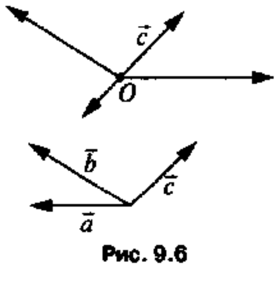



**Рис. 9.6**

2) Отложите от точки $O$ вектор, равный вектору $\vec{c}$.

3) Сколько векторов, равных вектору $\vec{c}$, можно отложить от точки $O$? (***От точки О можно отложить только один вектор, равный вектору $\vec{c}$.***)

***Задача № 114***

Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 дм и 4 дм. Найдите длину вектора $\overline{AC}$.

*Решение:* Длина вектора $\overrightarrow{AC}$ – это длина отрезка $AC$. Отрезок $AC$ является диагональю прямоугольника $ABCD$, следовательно, $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ дм, т. е. $|\overrightarrow{AC}| = 5$ дм.

*Ответ:* $|\overrightarrow{AC}| = 5$ дм.

2. Разобрать решение задачи № 750.

***Задача № 750***

*Решение:*

а) Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ (рис. 9.7), т. е. $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, тогда четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. В параллелограмме диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, поэтому $O$ – середина $BC$ и $AD$ одновременно, т. е. середины $BC$ и $AD$ совпадают.

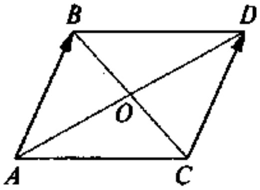


Рис. 9.7

б) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, так как середины $BC$ и $AD$ совпадают, поэтому $ABCD$ – параллелограмм, значит, $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, т. е. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, следовательно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

3. Решить самостоятельно задачу № 751 с последуюшим обсуждением.

***Задача № 751***

*Решение:*

а) Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, т. е. $AB \parallel DC$, $AB = DC$, следовательно, $ABCD$ – параллелограмм. Если $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$, то в параллелограмме смежные стороны $AB$ и $BC$ равны, поэтому $ABCD$ – ромб.

б) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, значит, $AB \parallel DC$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$ не коллинеарны, следовательно, $AD$ и $BC$ не параллельны. Четырехугольник, в котором две стороны параллельны, называется трапецией, т. е. $ABCD$ – трапеция.

*Ответ*: а) ромб; б) трапеция.

## VII. Самостоятельная работа обучающего характера

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. От точки $A$ (рис. 9.8) отложите вектор:
   а) равный $\vec{a}$;
   б) сонаправленный $\vec{b}$;
   в) противоположно направленный $\vec{c}$.

2. $ABCD$ – ромб. Равны ли векторы:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$?

***Вариант 2***

1. От точки $B$ (рис. 9.9) отложите вектор:

а) равный $\vec{b}$;

б) сонаправленный $\vec{c}$;

в) противоположно направленный $\vec{a}$.

2. $ABCD$ – квадрат. Равны ли векторы:

а) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$?

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. От точек $M$, $E$, $F$ и $K$ (рис. 9.10) отложите векторы:

а) $\overrightarrow{KP} = \vec{a}$;

б) $\overrightarrow{FN} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $|\overrightarrow{FN}| \neq |\vec{a}|$;

в) $\overrightarrow{ES} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $|\overrightarrow{ES}| = |\vec{a}|$;

г) $\overrightarrow{MQ}$ не коллинеарный $\vec{a}$.

2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$ и точкой $O$ делятся пополам. Равны ли векторы:

а) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CO}$;

б) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OD}$;

в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;

г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?

***Вариант 2***

1. От точек $A$, $B$, $C$ и $D$ (рис. 9.11) отложите векторы:

а) $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $|\overrightarrow{AM}| \neq |\vec{b}|$;

б) $\overrightarrow{BN} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $|\overrightarrow{BN}| = |\vec{b}|$;

в) $\overrightarrow{CQ}$ не коллинеарный $\vec{b}$;

г) $\overrightarrow{AC}$.

2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ равны и точкой $O$ делятся пополам. Равны ли векторы:

а) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$;

б) $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{DO}$;

в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$;

г) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AD}$?

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. В ромбе $ABCD$ $|\overrightarrow{AC}| = 12$, $|\overrightarrow{BD}| = 16$. От вершин $A$ и $B$ отложены векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$, равные $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно. Найдите длину вектора $\overrightarrow{KE}$.

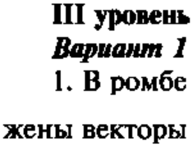


Рис. 9.8

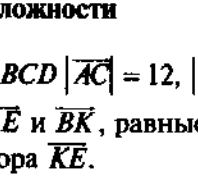


Рис. 9.9

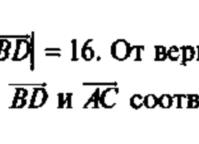


Рис. 9.10

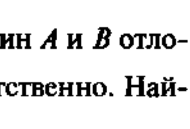


Рис. 9.11

2. Точка $M$ лежит внутри треугольника $ABC$. От этой точки отложены векторы $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MD}$, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ соответственно. Докажите, что $MFED$ – параллелограмм.

***Вариант 2***

1. В ромбе $ABCD$ $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 6$, $\left|\overrightarrow{BD}\right| = 8$. От вершин $C$ и $D$ отложены векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{DN}$, равные $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CA}$ соответственно. Найдите длину вектора $\overrightarrow{MN}$.

2. Точка $Q$ лежит внутри треугольника $MNK$. От этой точки отложены векторы $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$, равные векторам $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{NK}$ соответственно. Докажите, что $QABC$ – параллелограмм.

*Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:*

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

2. а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, б) $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DA}$, в) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$.

***Вариант 2***

2. а) $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{CD}$, б) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, в) $\overrightarrow{DA} \neq \overrightarrow{DC}$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

2. $ABCD$ – параллелограмм, поэтому:

а) $\overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{CO}$, б) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, в) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$, г) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

***Вариант 2***

2. $ABCD$ – прямоугольник, поэтому:

а) $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OC}$, б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, в) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$, г) $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{AD}$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Рис. 9.12.

$\Delta EAC$ – прямоугольный, $AC = 12$, $AE = 16 \Rightarrow EC = 20$.

$\Delta DBK$ – прямоугольный, $BK = 12$, $BD = 16 \Rightarrow KD = 20$.

В $\Delta DOC$ $DC = \sqrt{OD^2 + OC^2} = 10 \Rightarrow EK = 30 \Rightarrow \left|\overrightarrow{KE}\right| = 30$.

*Ответ:* $\left|\overrightarrow{KE}\right| = 30$.

2. Рис. 9.13.

$ABFM$ – параллелограмм, $AMCE$ – параллелограмм $\Rightarrow BF = CE$ и $BF \parallel CE \Rightarrow BFEC$ – параллелограмм, но $MBCD$ – тоже параллелограмм $\Rightarrow MD = FE$, $MD \parallel FE \Rightarrow MFED$ – параллелограмм.

***Вариант 2***

1. Рис. 9.14.

$\Delta ACM$ – прямоугольный, $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = 10$.

$\Delta DBN$ – прямоугольный, $NB = \sqrt{DN^2 + DB^2} = 10$.

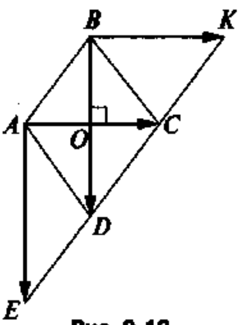



Рис. 9.12

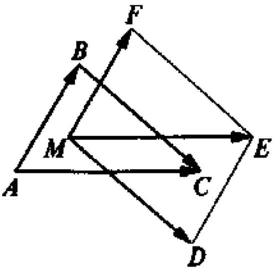



Рис. 9.13

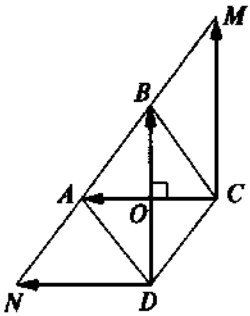



Рис. 9.14

$\Delta ABO$ – прямоугольный, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5 \Rightarrow MN = 15 \Rightarrow$ $|\overline{MN}| = 15$.

*Ответ:* $|\overline{MN}| = 15$.

2. Рис. 9.15.

$\overline{MN} = \overline{QA} \Rightarrow MNAQ$ – параллелограмм.

$\overline{MK} = \overline{QB} \Rightarrow MQBK$ – параллелограмм, т. е. $NA = MQ = KB$ и $NA \parallel MQ \parallel KB \Rightarrow$ $NABK$ – параллелограмм.

$\overline{QC} = \overline{NK} \Rightarrow QC \parallel NK \parallel AB$, $QC = NK =$ $= AB \Rightarrow QABC$ – параллелограмм.

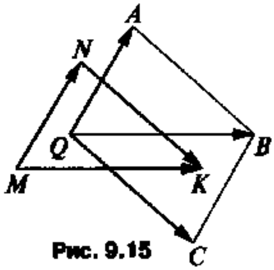



Рис. 9.15

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

## VIII. Рефлексия учебной деятельности

1. Как от данной точки отложить вектор, равный данному?
2. Как определить равенство векторов?
3. Какие векторы называются коллинеарными, сонаправленными, противоположно направленными?

## Домашнее задание

1. П. 79–81, вопрос 6 (учебник, с. 209).
2. Решить задачи № 748, 749, 752.

3. Выполнить работу над ошибками, допущенными при решении задач самостоятельной работы.
4. Решить дополнительную задачу.

*Дополнительная задача*

Радиус окружности равен 7 см, диаметр $AC$ и хорда $AB$ образуют угол в 30°. Внутри данной окружности выбрана точка $K$ и от нее отложены векторы $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{KP}$, равные $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно. Найдите длину вектора $\overrightarrow{PE}$.

*Ответ:* $\overrightarrow{PE} = 7$ см.

## Урок 5. Сумма двух векторов

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия суммы двух векторов на примере правила треугольника; рассмотреть законы сложения векторов и правило параллелограмма; научить учащихся строить сумму двух данных векторов, используя правила треугольника и параллелограмма.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

### III. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задачи № 752 (устно) и дополнительной задачи. Один ученик заранее записывает решение дополнительной задачи на доске.)

### IV. Определение темы урока

(Учитель рисует векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и точку $A$ на карте какой-либо местности. Ученики решают задачу.)

***Задача.*** Из пункта $A$ выехал мотоциклист со скоростью, равной длине вектора $\vec{a}$, и в направлении, совпадающем с направлением вектора $\vec{a}$. Через час он свернул в направлении, совпадающем с направлением вектора $\vec{b}$, и со скоростью, равной длине вектора $\vec{b}$. Определите расположение мотоциклиста на местности через 2 ч пути.

(Учитель определяет тему и цель урока.)

## V. Работа по теме урока

1. Ввести понятие суммы двух векторов (правило треугольника).
2. Законы сложения векторов:
   а) переместительный закон: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
   б) сочетательный закон $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3. Сложение векторов по правилу параллелограмма.

## VI. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях (8 класс).

Решить устно задачу № 115.

***Задача № 115***

Используя правило треугольника, найдите сумму векторов:

а) $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MT}$;
б) $\overrightarrow{CH}$ и $\overrightarrow{HC}$;
в) $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{0}$;
г) $\vec{0}$ и $\overrightarrow{CE}$.

*Решение:*

а) $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{PT}$;
б) $\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$;
в) $\overrightarrow{AB}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$;
г) $\vec{0}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CE}$.

*Ответ:* а) $\overrightarrow{PT}$; б) $\vec{0}$; в) $\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{CE}$.

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачу № 116 с последующим обсуждением.

***Задача № 116***

Используя правило треугольника, постройте векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{CB}=\vec{a}+\vec{b}$. Определите вид четырехугольника *OABC*.

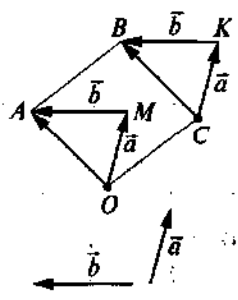



**Рис. 9.16**

*Решение:* Отложим от точки *O* вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ и от точки *M* – вектор $\overrightarrow{MA}=\vec{b}$ (рис. 9.16), тогда $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}$.

Аналогично строим $\overrightarrow{CK}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{KB}=\vec{b}$, тогда $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}$. Так как $\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{CB}=\vec{a}+\vec{b}$, то $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$. Следовательно, $OA \parallel CB$ и $OA = CB$, поэтому четырехугольник *OABC* – параллелограмм.

*Ответ:* Четырехугольник *OABC* – параллелограмм.

3. Разобрать решение задачи № 759 (а).
4. Решить самостоятельно задачи № 754, 762 (а, б, в).

### VII. Рефлексия учебной деятельности

1. В чем заключается правило сложения векторов (правило треугольника)?
2. Сформулируйте законы сложения векторов.
3. В чем заключается правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов?

### Домашнее задание

1. П. 82, 83, вопросы 7–10 (учебник, с. 209).
2. Решить задачу № 117 (рабочая тетрадь, 8 класс).
3. Решить задачи № 753, 759 (б), 763 (б, в) (учебник).

## Урок 6. Сумма нескольких векторов

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятие суммы двух и более векторов; научить учащихся строить сумму нескольких векторов, используя правило многоугольника.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задач № 763 (б, в), 117. Три ученика заранее записывают решение на доске.)

***Задача № 763 (б, в)***

б) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = 6 + 8 = 14.$

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 10.$

По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.

в) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}| = 6 + 8 = 14.$

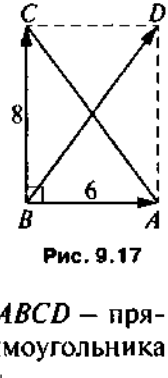


**Рис. 9.17**

По правилу параллелограмма $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, где $ABCD$ – параллелограмм (рис. 9.17).

В параллелограмме $ABCD$ – $\angle B = 90°$, значит, $ABCD$ – прямоугольник, тогда диагонали $AC$ и $BD$ данного прямоугольника равны, т. е. $BD = AC = 10$. Поэтому $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = 10.$

*Ответ:* б) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = 14$; $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 10$; в) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}| = 14$; $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 10.$

*Задача № 117*

Используя правило параллелограмма, построим векторы $\overrightarrow{OP} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{CT} = \vec{y} + \vec{x}$. Докажем, что $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PT}$.

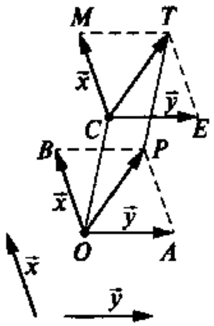


Рис. 9.18

*Решение:* Отложим от точки $O$ векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{y}$ (рис. 9.18). Построим точку $P$ так, чтобы четырехугольник $OAPB$ был параллелограммом, тогда по правилу параллелограмма $\overrightarrow{OP} = \vec{x} + \vec{y}$.

Отложим от точки $C$ векторы $\overrightarrow{CM} = \vec{y}$ и $\overrightarrow{CE} = \vec{x}$. Построим параллелограмм $CMTE$. Тогда по правилу параллелограмма $\overrightarrow{CT} = \vec{y} + \vec{x}$.

Так как $\overrightarrow{OP} = \vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{CT} = \vec{y} + \vec{x}$ и $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (переместительный закон сложения векторов), то $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CT}$. Следовательно, четырехугольник $OPTC$ – параллелограмм, а потому $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PT}$, что и требовалось доказать.

**III. Актуализация знаний учащихся**

1. Фронтальная работа с классом.

1) Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

б) $(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK}) + \overrightarrow{KE}$;

в) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{NX}$.

2) Найдите вектор $\vec{x}$ из условия:

а) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AK}$;

б) $(\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EF}) + \vec{x} = \overrightarrow{PA}$;

в) $\overrightarrow{MN} + \vec{x} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EP}$.

3) Среди данных сумм найдите равные: $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BK}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BK}$; $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{MK}$; $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{EK}$; $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{EN}$.

2. Индивидуальная работа по карточкам (дифференцированная работа).

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно у доски.)

**I уровень сложности**

1) Постройте вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 9.19), пользуясь правилом:

а) треугольника;

б) параллелограмма.

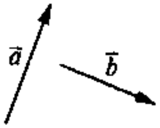



Рис. 9.19

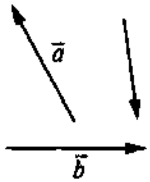



Рис. 9.20

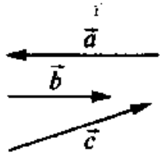



Рис. 9.21

2) Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{NK}$.

3) Найдите вектор $\vec{x}$ из условия:

а) $\overrightarrow{MK} + \vec{x} = \overrightarrow{ME}$; б) $\vec{x} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$.

**II уровень сложности**

1) Отметьте точку $M$ и постройте вектор $\overrightarrow{MN}$, равный $\vec{a} + \vec{b}$, используя правило параллелограмма, и вектор $\overrightarrow{MK}$, равный $\vec{b} + \vec{c}$, используя правило треугольника (рис. 9.20).

2) Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EK}$;

б) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{BE}$.

3) $ABCD$ – параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

**III уровень сложности**

1) *Дано:* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 9.21).

Постройте сумму векторов $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

2) Упростите выражение $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{QA}$.

3) Найдите вектор $\vec{x}$ из условия $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \vec{x} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{RQ}$.

4) *Дано:* $ABCD$ и $DCFE$ – параллелограммы (рис. 9.22). Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD}$.

### IV. Работа по теме урока

Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает задание. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

***Задание.*** Постройте сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, изображенных на рис. 9.23.

***Вывод.*** Чтобы построить сумму нескольких векторов, нужно построить сумму двух первых векторов, к полученному вектору прибавить третий вектор и т. д. Это правило сложения векторов называется правилом многоугольника.

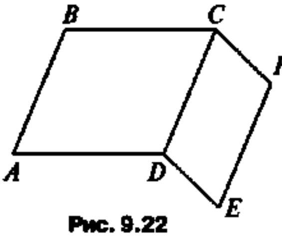



**Рис. 9.22**

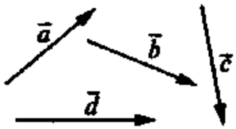



**Рис. 9.23**

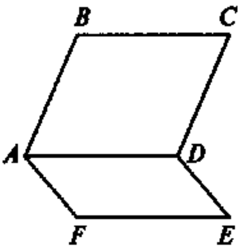



**Рис. 9.24**

### V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях (8 класс).

Решить задачу № 121.

***Задача № 121***

Пользуясь правилом многоугольника и законами сложения векторов, упростите выражение $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{KM}$.

*Решение:* $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{KM}=$ $=\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{BP}$.

*Ответ:* $\overrightarrow{BP}$.

2. Разобрать решение задачи.

*ABCD* и *ADEF* – параллелограммы. Укажите такой вектор $\vec{a}$, что $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}+\vec{a}=\overrightarrow{AF}$.

*Решение:* $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}+\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AF}+\vec{a}$ (рис. 9.24).

Так как *ADEF* – параллелограмм, то $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$.

Тогда

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AF}+\vec{a}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})+\vec{a}=\overrightarrow{AE}+\vec{a}$.

По условию задачи $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}+\vec{a}=\overrightarrow{AF}$, т. е. $\overrightarrow{AE}+\vec{a}=\overrightarrow{AF}$, следовательно, $\vec{a}=\overrightarrow{EF}$, так как $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

*Ответ:* $\vec{a}=\overrightarrow{EF}$.

3. Работа в парах.

Решить задачу с последующим обсуждением.

*Дано: ABCD* – ромб, *CDEF* – прямоугольник.

а) Упростите выражение $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EF}$.

б) Найдите вектор $\vec{b}$ такой, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FC}+$ $+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

*Решение:*

а) Так как *ABCD* – ромб, *CDEF* – прямоугольник, то $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DE}$, тогда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+$ $+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

б) Так как $ABCD$ – ромб, $CDEF$ – прямоугольник, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$, тогда $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} + \vec{b} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}) + \vec{b} = \overrightarrow{AD} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, то $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$.

*Ответ:* а) $\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{DC}$.

4. Работа в рабочих тетрадях (8 класс).

Решить самостоятельно задачи № 119, 120.

***Задача № 119***

*Дано:* В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120°$, $AD = 6$ см, $AB = 3$ см (рис. 9.25).

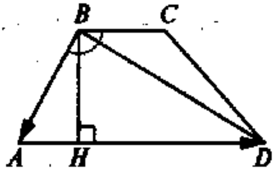


**Рис. 9.25**

*Найти:* $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}|$.

***Решение:*** По правилу треугольника $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$, следовательно, $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}|$. Длина вектора $\overrightarrow{BD}$ – это длина отрезка $BD$. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle BAD = 180° - \angle ABC = 60°$.

Проведем высоту $BH$ трапеции. В прямоугольном треугольнике $ABH$ имеем:

$$BH = AB \cdot \sin\angle BAD = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$

$$AH = AB \cdot \cos\angle ABD = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5 \text{ см.}$$

Из треугольника $BHD$ по теореме Пифагора получаем $BD^2 = BH^2 + (AD + AH)^2 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = 9$ см$^2$, откуда $BD = 3$ см.

*Ответ:* 3 см.

***Задача № 120***

Пользуясь правилами и законами сложения векторов, упростите выражение $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CT}$.

| Решение | Обоснование |
|---|---|
| $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CT} =$ | Сочетательный закон |
| $= (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{CT} =$ | Переместительный закон |
| $= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{CT} =$ | Правило треугольника |
| $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{AT}$ | Правило треугольника |

*Ответ:* $\overrightarrow{AT}$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены две задачи;
- оценка «4» — правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» — правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» — не ставится.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. В чем заключается правило треугольника сложения двух векторов?
2. В чем заключается правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов?
3. В чем заключается правило многоугольника сложения векторов?

### Домашнее задание

1. П. 84, вопрос 11 (учебник, с. 209).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 755, 760, 761 (учебник), № 118 (рабочая тетрадь, 8 класс); II уровень сложности: № 760, дополнительные задачи № 1, 2.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** Даны два параллелограмма $MNKP$ и $M_1NK_1P$. Докажите, что $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{KK_1}$.

***Задача 2.*** В треугольнике $ABC$ $M$ — точка пересечения медиан. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

## Урок 7. Вычитание векторов

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия разности двух векторов, противоположных векторов; научить учащихся строить разность двух данных векторов двумя способами; рассмотреть теорему о разности двух векторов; научить учащихся решать задачи на вычитание векторов.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задачи № 118 и дополнительных задач. Три ученика заранее записывают решение на доске.)

***Задача № 118***

а) Постройте векторы $\overrightarrow{OT} = \vec{x} + \vec{y}$; $\overrightarrow{PM} = \vec{y} + \vec{z}$.

б) Отложите от точки $H$ векторы $\vec{m} = \overrightarrow{OT} + \vec{z}$; $\vec{n} = \vec{x} + \overrightarrow{PM}$.

в) Докажите, что $\vec{m} = \vec{n}$.

***Решение:***

Так как $\overrightarrow{OT} = \vec{x} + \vec{y}$, то $\vec{m} = \overrightarrow{OT} + \vec{z} = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (рис. 9.26). Так как $\overrightarrow{PM} = \vec{y} + \vec{z}$, то $\vec{n} = \vec{x} + \overrightarrow{PM} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

В соответствии с сочетательным законом сложения векторов выполняется равенство $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$, значит, $\vec{m} = \vec{n}$, что и требовалось доказать.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1. Решение:*** Так как $MNKP$ и $M_1NK_1P$ – параллелограммы (рис. 9.27), то $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{NM_1} = \overrightarrow{K_1P}$, $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM_1}$, $\overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{K_1P} + \overrightarrow{PK}$.

Так как $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{NM_1} = \overrightarrow{K_1P}$, то $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM_1} = \overrightarrow{K_1P} + \overrightarrow{PK}$, поэтому $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{K_1K}$.

***Задача 2. Решение:*** По правилу треугольника $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1A}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1B}$ (рис. 9.28). Так как $CC_1$ – медиана, то $C_1A = C_1B$. Векторы $\overrightarrow{C_1A}$ и $\overrightarrow{C_1B}$ равны по длине, но противоположно направлены, тогда $\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B} = \vec{0}$. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1A}) + (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1B}) = (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_1}) + (\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B}) = 2 \cdot \overrightarrow{MC_1} + \vec{0} = 2 \cdot \overrightarrow{MC_1}$, $M$ – точка пересечения медиан, поэтому $2MC_1 = MC$, следовательно, $2 \cdot |\overrightarrow{MC_1}| = |\overrightarrow{MC}|$.

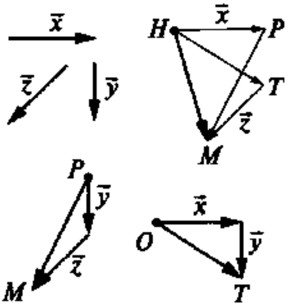



Рис. 9.26

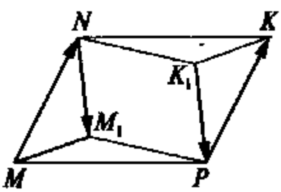



Рис. 9.27

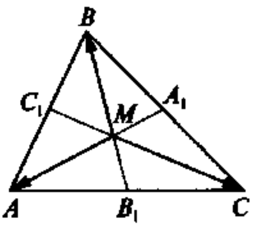



Рис. 9.28

Векторы $\overrightarrow{MC_1}$ и $\overrightarrow{MC}$ противоположно направлены, поэтому $2\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, тогда $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

### III. Определение темы урока

Фронтальная работа с классом.

1. Что значит «из числа *a* вычесть число *b*»? (*Разностью чисел a и b называется такое число c, что $b + c = a$.*)

2. Найдите вектор $\vec{x}$ из равенства:

а) $\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; б) $\vec{x} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MC}$.

3. Сформулируйте правило вычитания двух отрицательных чисел. (*Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$.*)

4. Укажите вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KE}$.

5. Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB})$; б) $\overrightarrow{MN} + (-\overrightarrow{KN})$; в) $\overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{ED})$.

(Учитель определяет тему и цель урока.)

### IV. Работа по теме урока

1. Ввести понятие разности двух векторов.
2. Рассмотреть задачу о построении вектора, равного $\vec{a} - \vec{b}$, с использованием правила треугольника.
3. Доказать теорему о разности двух векторов.
4. Рассмотреть задачу о построении разности векторов $\vec{a} - \vec{b}$, с использованием теоремы о разности двух векторов.

### V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях (8 класс).

Решить в парах задачи № 122, 123.

***Задача № 122***

В трапеции *BCEH* (рис. 9.29) $BH = 2CE$, точка $O$ – середина $BH$. Какие векторы с концом и началом в отмеченных точках являются противоположными вектору $\overrightarrow{OH}$?

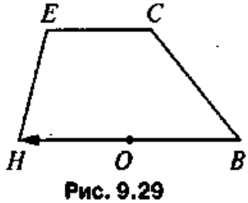


**Рис. 9.29**

*Решение:* По определению противоположным вектором является вектор, направление которого противоположно направлению вектора $\overrightarrow{OH}$, а длина равна длине вектора $\overrightarrow{OH}$.

Противоположно направлены вектору $\overrightarrow{OH}$ векторы $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{EC}$. Из них имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{OH}$, векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{EC}$.

Итак, противоположными вектору $\overrightarrow{OH}$ являются векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{EC}$.

*Ответ:* $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{EC}$.

***Задача № 123***

Какой из векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PC}$ равен разности $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$?

*Решение:* По определению разностью векторов $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$ является вектор $\vec{x}$ такой, что $\overrightarrow{MP} + \vec{x} = \overrightarrow{MC}$.

Проверим, какой из данных векторов удовлетворяет этому условию:

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CM} \neq \overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{CM} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CP} \neq \overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{CP} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

*Ответ:* $\overrightarrow{PC}$.

2. Фронтальная работа с классом.

Разобрать решение задачи № 762 (д).

***Задача № 762 (д)***

По правилу треугольника $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, тогда $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$, поэтому $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$. $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = a$.

*Ответ: a.*

3. Самостоятельное решение задач с последующей самопроверкой по готовым ответам.

Решить задачи № 756 (а—в), 764, 766.

***Задача № 756 (а—в)***

*Дано* (рис. 9.30).

*Построить:*

а) $\vec{x} - \vec{y}$; б) $\vec{z} - \vec{y}$; в) $\vec{x} - \vec{z}$.

*Построение* (рис. 9.31).

***Задача № 764***

а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{KD}) = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DK}) = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK}$.

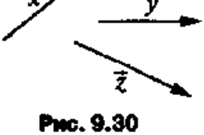



Рис. 9.30

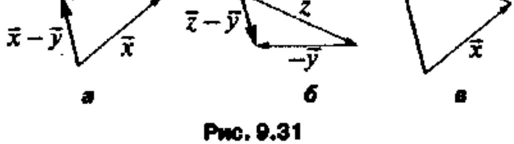



Рис. 9.31

б) $(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}) = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM}$.

*Ответ:* а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AM}$.

***Задача № 766***

$\overrightarrow{xy} = -\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

***Критерии оценивания:***

- оценка «5» – правильно решены две или три задачи;
- оценка «4» – правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – не ставится.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какие векторы называются противоположными?
2. Как построить разность двух данных векторов?
3. Сформулируйте теорему о разности двух векторов.

### Домашнее задание

1. П. 85, вопросы 12, 13 (учебник, с. 209).
2. Решить задачи № 757, 763 (а, г), 765, № 767 (устно).
3. Решить задачу № 124 (рабочая тетрадь, 8 класс).

## Урок 8. Решение задач по теме «Сложение и вычитание векторов»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме «Сложение и вычитание векторов»; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос.

(Пять учеников решают задачи у доски.)

Рис. 9.32.

*Найти:*

а) $\vec{a} + \vec{b}$, используя правило треугольника;

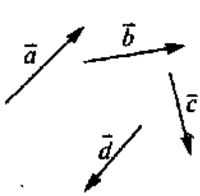


Рис. 9.32

б) $\vec{c}+\vec{d}$, используя правило параллелограмма;

в) $\vec{c}-\vec{b}$, используя теорему о разности двух векторов;

г) $\vec{d}-\vec{a}$, используя правило вычитания векторов;

д) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$, используя правило многоугольника.

## III. Повторение

(Учитель проверяет решение задачи № 124. Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся слушают, обсуждают, исправляют ошибки.)

1. Проверка домашнего задания.

***Задача № 124***

*Докажите:* Для любых трех точек $X$, $Y$, $Z$ верно равенство $\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}$.

*Доказательство:* По теореме о разности векторов $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, поэтому $\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{XY}+(-\overrightarrow{ZY})$. Запись $-\overrightarrow{ZY}$ означает «вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{ZY}$», т. е. $-\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{YZ}$. Следовательно, $\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{XY}+(-\overrightarrow{ZY})=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YX}$, что и требовалось доказать.

(Учитель проверяет решение задачи № 765. Один ученик готовит решение задачи на доске.)

***Задача № 765***

$\vec{p}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{ZX}=\overrightarrow{XX}=\vec{0}$.

$\vec{q}=(\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{XZ})+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{YZ}=(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ})+\overrightarrow{ZX}=$
$=\overrightarrow{XX}=\vec{0}$.

$\vec{r}=(\overrightarrow{ZY}-\overrightarrow{XY})-\overrightarrow{ZX}=(\overrightarrow{ZY}+\overrightarrow{YX})+\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{ZZ}=\vec{0}$.

2. Фронтальная работа с классом.

Разобрать решение задачи № 128 (рабочая тетрадь, 8 класс).

***Задача № 128***

*Дано:* В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle ABC=120°$, $AD=6$ м, $AB=3$ м (рис. 9.33).

*Найти:* $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$.

*Решение:* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$, следовательно, $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DB}|=DB$.

Так как $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$, то $\angle BAD=180°-\angle ABC=60°$.

Проведем высоту $BH$ трапеции. В треугольнике $ABH$ имеем $BH=AB\cdot\sin 60°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ м, $HA=AB\cdot\cos 60°=\frac{3}{2}$ м. Тогда $DH=AD-HA=4{,}5$ м.

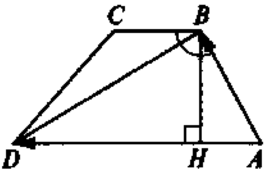



Рис. 9.33

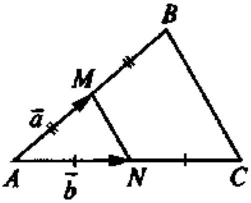



Рис. 9.34

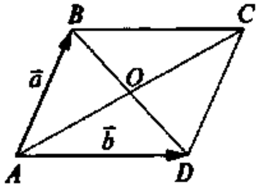



Рис. 9.35

Из треугольника $BHD$ по теореме Пифагора $BD^2 = DH^2 +$
$+ BH^2 = \left(4{,}5^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = 27$ м$^2$, откуда $BD = 3\sqrt{3}$ м.

Итак, $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right| = DB = 3\sqrt{3}$ м.

*Ответ:* $3\sqrt{3}$ м.

3. Работа в парах.

(Учитель по мере необходимости оказывает помощь парам.)

Решить задачи № 768, 771 с последующим обсуждением.

***Задача № 768*** (рис. 9.34)

*Решение:*

а) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\vec{a}$ (так как $\overrightarrow{AM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BM}$, $M$ – середина $AB$);

б) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN} = \vec{b}$ (так как $\overrightarrow{AN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{NC}$, $N$ – середина $AC$);

в) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$, тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a}$;

г) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} =$
$= -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a}$.

*Ответ:* а) $\overrightarrow{BM} = -\vec{a}$; б) $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$; в) $\overrightarrow{MN} = \vec{b} - \vec{a}$; г) $\overrightarrow{BN} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a}$.

Наводящие вопросы.

– Что вы можете сказать о направлении и длине векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$?
– Что можно сказать о векторах $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{NC}$?
– Как связаны между собой векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{MN}$? Выразите $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
– Как связаны между собой векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BN}$? Чему равна длина вектора $\overrightarrow{AB}$?

***Задача № 771*** (рис. 9.35)

*Решение:*

а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$;

б) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$;

в) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$, так как $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AO}$;

г) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$;

*Ответ:* а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$; б) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b}$; в) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = -\vec{a}$; г) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}$.

Наводящие вопросы.

– Чему равна сумма векторов $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$?
– Какая связь существует между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{DB}$?
– Упростите сумму $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$.
– Каким вектором можно заменить вектор $\overrightarrow{BC}$? Почему?
– Замените сложением разность $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$.
– В сумме $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$ замените один из векторов равным ему так, чтобы получилось сложение векторов по правилу треугольника.
– Что вы можете сказать о векторах $\vec{a}$ и $\overrightarrow{BA}$?
– Замените разность $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ сложением.
– Выразите вектор $\overrightarrow{BA}$ через один из данных векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$.

## IV. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Постройте векторы $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$.

2. В равнобедренном треугольнике $ABC$ точка $B_1$ – середина основания $AC$.

а) Упростите выражение $\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B_1C}$.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B_1C}\right|$, если $AB = 10$ см, $BB_1 = 8$ см.

***Вариант 2***

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{p}$, $\vec{k}$, $\vec{c}$. Постройте векторы $\vec{k} + \vec{c}$, $\vec{k} - \vec{p}$.

2. В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AB$ проведена медиана $CC_1$.

а) Упростите выражение $\overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right|$, если $AC = 5$ см, $AB = 6$ см.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Постройте векторы $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}-\vec{c}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ точка $O$ – точка пересечения диагоналей.

а) Упростите выражение $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}$.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}\right|$, если $AD = 8$ см, $CD = 6$ см, а перпендикуляр, опущенный из вершины $D$ на диагональ $AC$, равен 4 см.

***Вариант 2***

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{p}$, $\vec{c}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$. Постройте векторы $\vec{p}+\vec{c}+\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{y}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ точка $O$ – точка пересечения диагоналей.

а) Упростите выражение $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{OD}$.

б) Найдите $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{OD}\right|$, если $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, а перпендикуляр, опущенный из вершины $B$ на диагональ $BC$, равен 8 см.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Постройте векторы $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$.

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle A = 30°$, меньшее основание равно боковой стороне, а высота, опущенная из вершины тупого угла $B$, равна 4 см. Найдите $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BA}\right|$.

***Вариант 2***

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{p}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$. Постройте векторы $-\vec{p}-\vec{k}+\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{m}-\vec{p}+\vec{k}-\vec{n}$.

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание равно боковой стороне, большее основание $AD$ равно 20 см, $\angle A = 60°$. Найдите $\left|\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\right|$.

## V. Рефлексия учебной деятельности

**I уровень сложности**

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

**II и III уровни сложности**

(Используя готовые ответы к задачам самостоятельной работы, ученики находят допущенные ошибки.)

*Ответы к задачам самостоятельной работы:*

**I уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 2. а) $\overline{CA}$; б) 12 см. | 2. а) $\overline{CC_1}$; б) 4 см. |

**II уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 2. а) $\overline{CO}$; б) $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ см. | 2. а) $\overline{AO}$; б) $3+2\sqrt{5}$ см. |

**III уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 2. $8+8\sqrt{3}$ см. | 2. 10 см. |

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – правильно решены задачи № 1 и 2 (а) или 2 (б);
- оценка «3» – правильно решена одна из задач;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(По окончании работы учащиеся сдают тетради на проверку.)

**Домашнее задание**

1. Решить задачи № 769, 770, 772 (учебник).
2. Решить задачи № 125, 126 (рабочая тетрадь, 8 класс).

## Урок 9. Умножение вектора на число

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия умножения вектора на число; познакомить учащихся со свойствами умножения вектора на число.

### Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Проверка домашнего задания**

(Учитель проверяет решение задач № 125, 126. Один ученик вслух читает задачу и ее решение. Учащиеся слушают, обсуждают, исправляют ошибки.)

***Задача № 125***

Упростите выражение $(\overline{HB}+\overline{BA}-\overline{TA})-(\overline{PX}-\overline{TX})$.

*Решение:* $(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{TX}) = (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} + (-\overrightarrow{TX})) = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AT}) - (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XT}) = \overrightarrow{HT} - \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{HT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{HP}$.

*Ответ:* $\overrightarrow{HP}$.

***Задача № 126***

*Решение:* Отрезок $AM$ – медиана треугольника $ABC$ (рис. 9.36). Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{MC} = \vec{y}$.

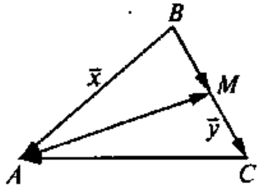


**Рис. 9.36**

*Ответ:* $\overrightarrow{BM} = \vec{y}$; $\overrightarrow{AM} = \vec{y} - \vec{x}$; $\overrightarrow{CA} = -\vec{y} - \vec{y} + \vec{x}$.

## III. Актуализация знаний учащихся

1. Индивидуальное задание.

(Два-три ученика самостоятельно решают задачу № 127 из рабочей тетради. По окончании работы тетради сдают на проверку учителю.)

***Задача № 127***

Найдите вектор $x$, если:

а) $\overrightarrow{PO} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$;

б) $\vec{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}$;

в) $\overrightarrow{CM} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$.

*Решение:*

а) $\overrightarrow{PO} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$, следовательно, $\overrightarrow{PO} = \vec{x} + \overrightarrow{PM}$, поэтому $\vec{x} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{MO}$;

б) $\vec{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}$, поэтому $\vec{x} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PA}$;

в) $\overrightarrow{CM} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$, поэтому $\vec{x} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CP}$.

*Ответ:* а) $\overrightarrow{MO}$; б) $\overrightarrow{PA}$; в) $\overrightarrow{CP}$.

2. Работа в парах.

Решить задачи по готовым чертежам с последующим обсуждением.

1) Рис. 9.37.

*Найти:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$.

2) Рис. 9.38.

*Доказать:* $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

3) *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник (рис. 9.39).

*Доказать:* а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{AO}|$; б) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$.

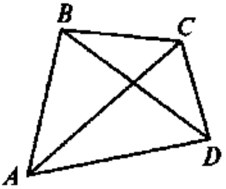



Рис. 9.37

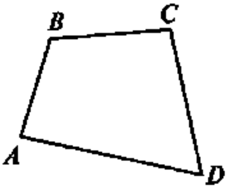



Рис. 9.38

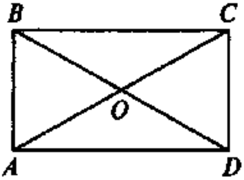



Рис. 9.39

## IV. Определение темы урока

1. Работа в группах.

(Учитель делит класс на две группы. Каждая группа получает одну задачу. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

***Задача 1.*** Начертите вектор $\vec{a}$ и вектор $\vec{b}$ так, что:

а) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$; б) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $|\vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$.

***Задача 2.*** Катер движется прямолинейно со скоростью $\vec{v}$ и обгоняет пловца, плывущего в том же направлении со скоростью в 3 раза меньшей скорости катера. Навстречу им движется моторная лодка со скоростью, превышающей скорость пловца в 2 раза. Изобразите с помощью векторов скорости катера, моторной лодки и пловца.

## V. Работа по теме урока

1. Ввести понятие умножения ненулевого вектора на число.

2. Сформулировать основные свойства умножения вектора на число.

На доске и в тетрадях запись:

*Краткое определение:*

$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$, если:

1) $|\vec{b}| = k \cdot |\vec{a}|$;

2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ при $k > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $k < 0$.

*Следствия из определения:*

1) $\vec{a} \cdot 0 = 0$;

2) Для любого числа $k$ и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ коллинеарные.

*Основные свойства умножения вектора на число:*

Для любых чисел $k$ и $l$ и векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $(kl) \cdot \vec{a} = k \cdot (l\vec{a})$ (сочетательный закон);

2) $(k + l) \cdot \vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон);

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

**VI. Закрепление изученного материала**

1. Фронтальная работа с классом.

Решить задачи № 129, 130 (рабочая тетрадь, 8 класс).

***Задача № 129***

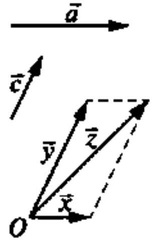


Рис. 9.40

Отложите от точки $O$ векторы: $\vec{x} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}$; $\vec{y} = 2 \cdot \vec{c}$; $\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{c}$.

*Решение:* Так как $\vec{x} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}$ (рис. 9.40), то, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $|\vec{x}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}|$. Отложим от точки $O$ вектор $\vec{x}$.

Аналогично $\vec{y} \uparrow\downarrow \vec{c}$ и $|\vec{y}| = 2 \cdot |\vec{c}|$. Отложим от точки $O$ вектор $\vec{y}$. $\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{c} = \vec{x} + \vec{y}$. Так как векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ отложены от точки $O$, строить вектор $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ удобно по правилу параллелограмма. Строим вектор $\vec{z}$.

***Задача № 130***

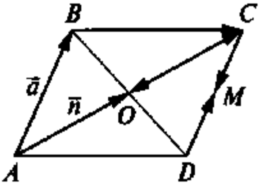


Рис. 9.41

*Дано:* Параллелограмм $ABCD$, $DM = CM$, $\overrightarrow{AO} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 9.41).

***Выразите:***

а) векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\vec{n}$;

б) векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{CM}$ через вектор $\vec{a}$;

в) вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$.

***Решение:***

а) Так как точка $O$ является точкой пересечения диагоналей параллелограмма, то $AO = \frac{1}{2} AC$, значит, $|\overrightarrow{AC}| = 2 \cdot |\overrightarrow{AO}|$. Кроме того, $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \vec{n}$, следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AO} = 2 \cdot \vec{n}$. Далее, $|\overrightarrow{CO}| = |\overrightarrow{AO}|$, $\overrightarrow{CO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AO}$, поэтому $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO} = -\vec{n}$.

б) Противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, поэтому $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Далее, $\overrightarrow{DM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{DM}| = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{DC}|$, следовательно, согласно определению умножения вектора на число, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}$. Так как $\overrightarrow{CM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{CM}| = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{DC}|$, то $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$.

в) По правилу треугольника $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, но $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$, следовательно, $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{n}$.

*Ответ:* а) $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \vec{n}$, $\overrightarrow{CO} = -\vec{n}$; б) $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}$; $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$; в) $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{n}$.

2. Самостоятельное решение задач.

1) Выполнить практические задания № 776 (б, г, д), 777.

2) Решить задачи № 779, 781 (а), 780 (б).

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три или четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или одна задача полностью и две частично;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или частично две задачи;
- оценка «2» – не ставится.

### VII. Рефлексия учебной деятельности

1. Что значит «умножить ненулевой вектор $\vec{a}$ на число $k$»?
2. Сформулируйте основные свойства умножения вектора на число.

### Домашнее задание

1. П. 86, вопросы 14–17 (учебник, с. 209).
2. Выполнить практические задания № 775, 776 (а, в, е).
3. Решить задачи № 781 (б, в), 780 (а).

## Урок 10. Умножение вектора на число

***Основная дидактическая цель урока:*** совершенствовать навыки решения задач на применение свойств умножения вектора на число.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Фронтальная работа с классом.

Ответить на вопросы 14–17 (с. 209 учебника).

2. Решить задачи по готовым чертежам (устно).

1) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (рис. 9.42).

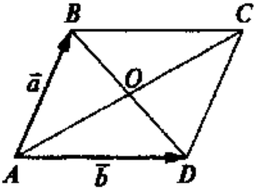


Рис. 9.42

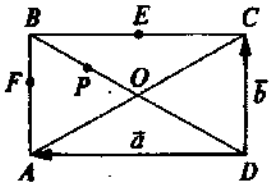


Рис. 9.43

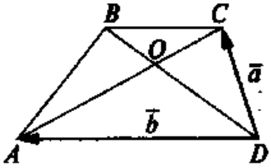


Рис. 9.44

Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$.

2) *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $E$ – середина $BC$, $F \in AB$, $AF : FB = 3 : 2$, $P$ – середина $OB$ (рис. 9.43).

Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{FE}$.

3) *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (рис. 9.44).

Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$.

3. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проведения устного опроса.)

**I уровень сложности**

1. Построить векторы (рис. 9.45):

а) $\frac{1}{2}\vec{a}$; б) $2\vec{b}$; в) $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$; г) $2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

2. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 9.46).

Выразить $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$.

**II уровень сложности**

1. Построить векторы (рис. 9.47):

а) $-\frac{5}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$; б) $\frac{3}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{14}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.

2. *Дано:* $ABCD$ – ромб, $E \in BC$, $BE : EC = 3 : 1$, $K$ – середина $DC$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (рис. 9.48).

Выразить $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$.

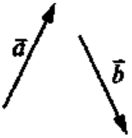


Рис. 9.45

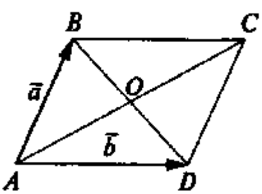


Рис. 9.46

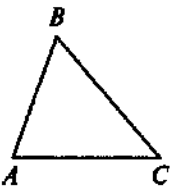


Рис. 9.47

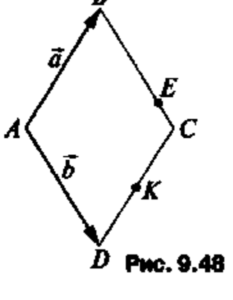


Рис. 9.48

**III уровень сложности**

1. *Дано:* $ABCD$ — параллелограмм (рис. 9.49).

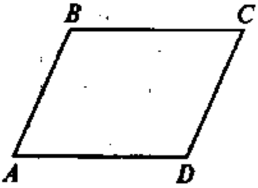


**Рис. 9.49**

Построить векторы:

а) $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{10}\overrightarrow{CA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$;

б) $\frac{2}{9}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{2}{9}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

2. Точка $M$ лежит на диагонали ромба $ABCD$, а точка $H$ — на стороне $AD$, причем $AM : MC = 2 : 1$ и $AH = HD$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

**III. Решение задач**

1. Работа в парах.

Решить задачу № 132 (рабочая тетрадь, 8 класс) с последующим обсуждением.

***Задача № 132***

Докажите, что векторы $\vec{c} = 2 \cdot (\vec{a} + 1{,}5\vec{p}) - 3\vec{p}$ и $\vec{a}$ коллинеарные.

*Доказательство:*

$\vec{c} = 2 \cdot (\vec{a} + 1{,}5\vec{p}) - 3\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{p} - 3\vec{p} = 2\vec{a} + 0\vec{p} = 2\vec{a}$.

По определению произведения вектора на число векторы $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ коллинеарные, что и требовалось доказать.

2. Фронтальная работа с классом.

Разобрать решение задачи № 783.

***Задача № 783***

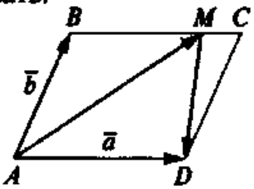


**Рис. 9.50**

*Решение:*

1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ (рис. 9.50). Так как $BM : MC = \frac{1}{2} AD$, то $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$.

2) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{a} =$

$= \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$.

*Ответ:* 1) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$; 2) $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$.

Наводящие вопросы и указания к решению задачи.

- Рассмотрим $\Delta ABM$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BM}$.
- Что вы можете сказать о направлениях векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\vec{a}$?
- Какую часть от длины вектора $\vec{a}$ составляет длина вектора $\overrightarrow{BM}$?

– Выразите в равенстве $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
– Найдите фигуру, в которой имеется вектор $\overrightarrow{MD}$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или векторы, уже выраженные через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(В данном случае учащиеся могут предложить два варианта ответа: а) четырехугольник $ABMD$; б) треугольник $AMD$.)

– Составьте равенство, из которого вектор $\overrightarrow{MD}$ можно выразить через другие векторы.

3. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

*I уровень сложности:* задачи № 784 (а), 786.

*II уровень сложности:* задача № 786, дополнительные задачи.

***Задача № 784 (а)***

*Решение:* Так как $ABCD$ – параллелограмм (рис. 9.51), то $AB = CD$, $BC = AD$, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AO = OC$, $BO = OD$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}.$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}.$$

$$\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO} = -\left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}\right) = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}.$$

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO} = -\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}.$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{x}.$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \vec{x} + \left(-\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}\right) = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}.$$

$$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y}.$$

***Задача № 786***

*Решение:* Так как $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ – медианы, то $AC_1 = C_1B$, $AB_1 = B_1C$ (рис. 9.52).

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

*Ответ:* $\overrightarrow{BB_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$; $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

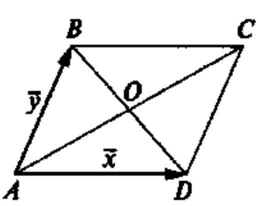


Рис. 9.51

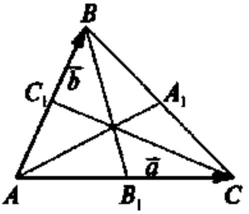


Рис. 9.52

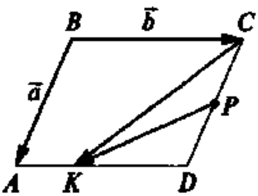


Рис. 9.53

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** В параллелограмме $ABCD$ на сторонах $CD$ и $AD$ отмечены соответственно точки $P$ и $K$ так, что $CP : PD = 2 : 3$, $AK : KD = 1 : 2$. Выразите векторы $\overline{CK}$ и $\overline{PK}$ через векторы $\vec{a} = \overline{BC}$ и $\vec{b} = \overline{BA}$.

*Решение:* $\overline{CK} = \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AK} = -\overline{BC} + \overline{BA} + \overline{AK}$ (рис. 9.53).

Так как $AK : KD = 1 : 2$, то $AK = \frac{1}{3}AD$, тогда $\overline{AK} = \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{BC}$.

$\overline{CK} = -\overline{BC} + \overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC} = -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

$\overline{PK} = \overline{PC} + \overline{CK}$.

Так как $CP : PD = 2 : 3$, то $PC = \frac{2}{5}CD$, тогда $\overline{PC} = \frac{2}{5}\overline{CD} = \frac{2}{5}\overline{BA}$,

т. е. $\overline{PK} = \frac{2}{5}\overline{BA} + \overline{CK} = \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{7}{5}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

*Ответ:* $\overline{CK} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$; $\overline{PK} = \frac{7}{5}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

***Задача 2.*** В трапеции $ABCD$ основание $AB$ в 3 раза меньше основания $CD$, $M$ – середина стороны $BC$, а на стороне $AB$ отмечена точка $N$ так, что $\frac{AN}{NB} = \frac{3}{4}$. Выразите векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MN}$ через векторы $\vec{x} = \overline{DA}$ и $\vec{y} = \overline{DC}$.

*Решение:* Продолжим прямые $DC$ и $AM$ ($DC \cap AM = K$) (рис. 9.54).

$\Delta ABM = \Delta KCM$ ($BM = MC$, так как $M$ – середина $BC$; $\angle BMA = \angle CMK$ как вертикальные, $\angle ABM = \angle MCK$ как накрест лежащие при параллельных прямых $AB$ и $DC$ и секущей $BC$), следовательно, $AB = CK$, $AM = MK$.

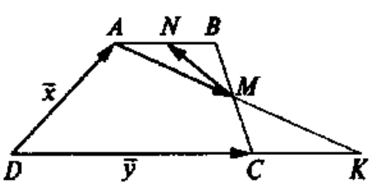


Рис. 9.54

Так как $AB$ в 3 раза меньше $DC$, то $AB = \frac{1}{3}DC \Rightarrow CK = \frac{1}{3}DC \Rightarrow$

$DK = DC + CK = DC + \frac{1}{3}DC = \frac{4}{3}DC$, $\overline{DK} = \frac{4}{3}\overline{y}$.

$N$ — середина $AB$, следовательно, $AN = \frac{1}{2}AB$.

$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{DK}) = \frac{1}{2}(-\overline{DA} + \overline{DK}) = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + \frac{4}{3}\vec{y}\right) =$

$= \frac{2}{3}\overline{y} - \frac{1}{2}\overline{x}$.

$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN} = -\overline{AM} + \frac{1}{2}\overline{AB} = -\left(\frac{2}{3}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{y}\right) =$

$= -\frac{2}{3}\overline{y} + \frac{1}{2}\overline{x} + \frac{1}{6}\overline{y} = \frac{1}{2}\overline{x} - \frac{1}{2}\overline{y}$.

*Ответ:* $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{y} - \frac{1}{2}\overline{x}$; $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{x} - \frac{1}{2}\overline{y}$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены две задачи;
- оценка «4» — правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» — правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» — все задачи решены неправильно.

## IV. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите вектор $\vec{x}$ такой, что $|\vec{x}| = 2$ см. Постройте векторы $3\overline{x}$; $-2\overline{x}$; $\frac{1}{2}\overline{x}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне $AB$ отмечена точка $K$ так, что $AK : KB = 2 : 1$, $O$ — точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\overline{OC}$ и $\overline{CK}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AB}$; $\vec{b} = \overline{AD}$.

***Вариант 2***

1. Начертите вектор $\vec{a}$, абсолютная величина которого равна 3 см. Постройте векторы $2\vec{a}$; $-\vec{a}$; $\frac{1}{3}\vec{a}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне $BC$ взята точка $P$ так, что $BP : PC = 3 : 1$, $O$ – точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{PA}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, что $|\vec{a}| = 2$ см, $|\vec{b}| = 3$ см. Постройте вектор $\frac{1}{3}\vec{b} - 2\vec{a}$.

2. На сторонах $BC$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки $M$ и $N$ так, что $M$ – середина $BC$, $CN : ND = 1 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$.

***Вариант 2***

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ так, что $|\vec{x}| = 3$ см, $|\vec{y}| = 4$ см. Постройте вектор $\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах $AB$ и $AD$ взяты точки $M$ и $N$ соответственно так, что $M$ – середина $AB$, $AN : ND = 1 : 2$. Выразите векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. С помощью циркуля и линейки без делений постройте вектор $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне $AD$ и диагонали $AC$ лежат точки $H$ и $M$ соответственно так, что $AM : MC = 2 : 3$, $AH : HD = 1 : 2$ Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CN}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

***Вариант 2***

1. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. С помощью циркуля и линейки без делений постройте вектор $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне $AB$ и диагонали $AC$ взяты точки $E$ и $K$ соответственно так, что $AE : EB = 3 : 2$, $AK : KC = 5 : 2$. Выразите векторы $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

## V. Рефлексия учебной деятельности

*Ответы к задачам самостоятельной работы:*

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

2. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

***Вариант 2***

2. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$; $\overrightarrow{PA} = -\vec{x} - \frac{3}{4}\vec{y}$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

2. $\overrightarrow{AM} = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$; $\overrightarrow{AN} = \vec{y} + \frac{2}{3}\vec{x}$; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{x}$.

***Вариант 2***

2. $\overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{CN} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

2. $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{3}{5}\vec{a}$; $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{15}\vec{b}$; $\overrightarrow{CN} = -\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

***Вариант 2***

2. $\overrightarrow{DK} = \frac{5}{7}\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b}$; $\overrightarrow{CE} = -\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$; $\overrightarrow{KE} = -\frac{4}{35}\vec{a} - \frac{5}{7}\vec{b}$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены две задачи;
- оценка «4» — правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» — правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» — все задачи решены неправильно.

(По окончании работы учащиеся сдают тетради на проверку.)

## Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 782, 784 (б), 787 (учебник), № 131 (рабочая тетрадь, 8 класс); II уровень сложности: № 782, 784 (б), 785, 787 (учебник).

# Урок 11. Применение векторов к решению задач

***Основные дидактические цели урока:*** научить учащихся применять векторы при решении геометрических задач; совершенствовать навыки выполнения действий над векторами.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работу над ошибками выполнить дома самостоятельно, используя готовые ответы.

### III. Актуализация знаний учащихся

1. Самостоятельное решение задач с последующим обсуждением.

1) Упростите выражение $\overline{MN} + \overline{KE} - \overline{AN} - \overline{BA} - \overline{KB} + \overline{EC}$.

2) Из условия $\overline{DM} - \overline{EF} + \overline{ED} + \overline{MK} + \bar{x} = \overline{PK} - \overline{PC} + \overline{FA}$ найдите вектор $\bar{x}$.

3) В трапеции $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$. Выразите векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MN}$ через векторы $\vec{m} = \overline{DA}$, $\vec{n} = \overline{DC}$, где $M$ — середина $BC$, а $N$ — точка на стороне $AB$, такая, что $AN : NB = 2 : 3$.

(Учитель собирает 3–4 тетради и проверяет их, пока учащиеся самостоятельно решают задачи.)

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три ученика, не справившихся с задачами самостоятельной работы, получают карточки разного уровня сложности.)

**I уровень сложности**

Заполните пропуски в решении.

*Дано:* $ABCD$ — параллелограмм, $E \in AB$, $AE : EB = 3 : 2$, $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{AD}$ (рис. 9.55).

*Выразить:* $\overline{AO}$ и $\overline{CE}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

*Решение:* $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, тогда $\overline{AO} = \dots$ .

$\overline{CE} = \overline{CB} + \overline{BE}$. Так как $AE : EB = 3 : 2$, то $EB = \frac{2}{5}AB$, поэтому $\overline{BE} = \dots$ . Следовательно, $\overline{CE} = \dots$ .

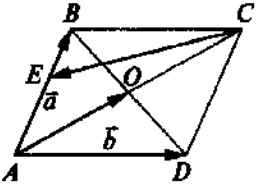


Рис. 9.55

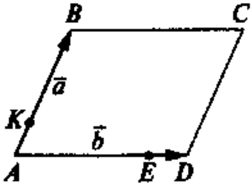


Рис. 9.56

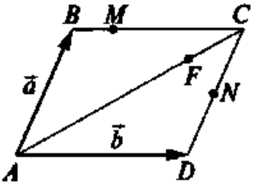


Рис. 9.57

*Ответ:* $\overrightarrow{AO} = ...$, $\overrightarrow{CE} = ...$ .

**II уровень сложности**

*Дано:* $ABCD$ — параллелограмм, $AK : KB = 1 : 3$, $AE : ED = 4 : 1$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ (рис. 9.56).

*Выразить:* $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{KE}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

*Указание.* $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BK} = -\frac{3}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{5}\vec{b}$.

**III уровень сложности**

*Дано:* $ABCD$ — параллелограмм, $AF : FC = 4 : 1$, $BM : MC = 1 : 3$, $N$ — середина $CD$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ (рис. 9.57).

*Выразить:* $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{NF}$, $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

*Указание.* $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF}$.

3. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 131, 785, 787.)

***Задача № 131***

Упростите выражение:

а) $-0,5(12\vec{a})$;

б) $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b}$;

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p}$;

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q})$.

*Решение:*

а) $-0,5(12\vec{a}) = (-0,5 \cdot 12)\vec{a} = -6\vec{a}$;

б) $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b} = (2,5 - 1,7)\vec{b} = 0,8\vec{b}$;

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p} = 3\vec{c} + 3\vec{p} - 5\vec{p} = 3\vec{c} - 2\vec{p}$;

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q}) = 10\vec{p} - 6\vec{q} - 9\vec{p} + 6\vec{q} = \vec{p}$.

*Ответ:* а) $-6\vec{a}$; б) $-0,8\vec{b}$; в) $3\vec{c} - 2\vec{p}$; г) $\vec{p}$.

***Задача № 785***

*Решение:* Точки $M$ и $N$ — середины $AC$ и $BD$, значит, $AM = MC$, $BN = ND$ (рис. 9.58).

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

***Задача № 787***

***Решение:***

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}$, т. е. $\vec{a} + \overrightarrow{DF} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \vec{b} - \vec{a}$ (рис. 9.59).

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.$$

*Ответ:* $\frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$.

## IV. Определение темы урока

Работа в группах.

(Ученики в группах решают задачу 1 на с. 204 учебника. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

(Учитель определяет тему и цель урока.)

## V. Работа по теме урока

Фронтальная работа с классом.

Решить задачу № 134 (рабочая тетрадь, 8 класс).

***Задача № 134***

*Дано:* Точки $K$ и $M$ – середины сторон $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$, точки $P$ и $T$ – середины диагоналей $AC$ и $BD$ (рис. 9.60).

*Доказать:* Середины отрезков $KM$ и $PT$ совпадают.

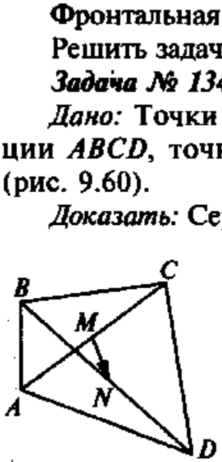


**Рис. 9.58**

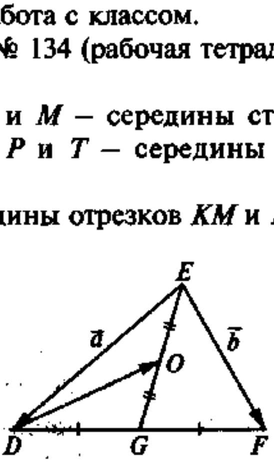


**Рис. 9.59**

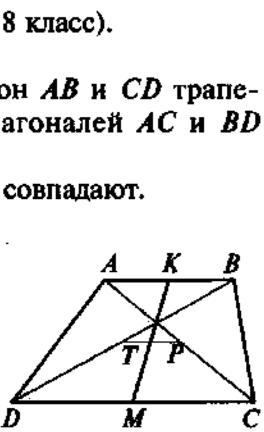


**Рис. 9.60**

*Доказательство:* Пусть точка $X$ – середина отрезка $KM$, точка $Y$ – середина отрезка $PT$. Тогда для произвольной точки $O$ имеем:

$$\overline{OX} = \frac{1}{2}(\overline{OK} + \overline{OM}). \ (1)$$

$$\overline{OY} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OT}). \ (2)$$

По условию задачи точки $K$ и $M$ – середины отрезков $AB$ и $CD$, следовательно, $\overline{OK} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ и $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD})$.

Аналогично, подставляя найденные выражения в формулы (1) и (2), получаем:

$$\overline{OX} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) + \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD})\right) = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

$$\overline{OY} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}) + \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD})\right) = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Отсюда следует, что $\overline{OX} = \overline{OY}$. Так как от точки $O$ можно отложить только один вектор, равный данному, то точки $X$ и $Y$ совпадают, следовательно, совпадают середины отрезков $KM$ и $PT$, что и требовалось доказать.

Наводящие вопросы.

– Можно ли выразить векторы $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ через $\overline{OK}, \overline{OM}, \overline{OP}, \overline{OT}$?

– Можно ли выразить векторы $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ через $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$?

(Учитель определяет тему и цель урока.)

## VI. Закрепление изученного материала

1. Работа в парах.

Разобрать решение задачи 2 на с. 204 учебника с последующим обсуждением.

2. Самостоятельное решение задач.

Рещить задачу № 792, дополнительные задачи № 1, 2 (при наличии времени).

(Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

***Задача № 792***

*Теорема:* Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

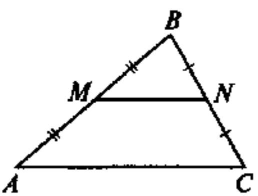


Рис. 9.61

*Дано:* $\Delta ABC$, $MN$ – средняя линия треугольника (рис. 9.61).

*Доказать:* $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

*Доказательство:* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, следовательно, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Поэтому векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарные, а $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, т. е. $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1***

*Дано:* Четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка $O$. Известно, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}, \angle A = 65°$.

*Найти:* Остальные углы четырехугольника $ABCD$.

*Решение:* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$. По условию задачи $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$, следовательно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, т. е. $DC \parallel AB$ и $DC = AB$, значит, $ABCD$ – параллелограмм.

$\angle C = \angle A = 65°$, $\angle B = \angle D = 180° - 65° = 115°$

*Ответ:* $\angle C = 65°$; $\angle B = \angle D = 115°$.

***Задача 2***

*Дано:* На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ отмечены соответственно точки $M$ и $H$ так, что $AM = 4BM$, $CH = 4BH$.

Доказать, используя векторы, что $MH \parallel AC$ и $MH : AC = 1{,}5$.

*Доказательство:*

$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ (рис. 9.62), т. е. $MN \parallel AC$,

$MH = \frac{1}{5}AC$ или $MH : AC = 1 : 5$.

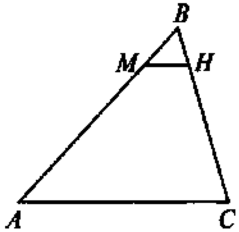


Рис. 9.62

$AM = 4BM$, $CH = 4BH$, следовательно, $BM = \frac{1}{5}AB$, $BH = \frac{1}{5}BC$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача с незначительными ошибками;
- оценка «2» – не ставится.

### VII. Рефлексия учебной деятельности

1. Какая связь существует между векторами $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, если точка $C$ – середина отрезка $AB$, а точка $O$ – произвольная точка плоскости?
2. Какое свойство треугольника можно доказать с использованием векторов?
3. Сформулируйте свойство прямой, проведенной через середины оснований трапеции.
4. Сформулируйте свойство средней линии треугольника.

### Домашнее задание

1. П. 87.
2. Решить задачи № 789, 790, 791, 788 (устно).

## Урок 12. Средняя линия трапеции

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятие средней линии трапеции; рассмотреть теорему о средней линии трапеции; научить учащихся решать задачи на использование свойств средней линии трапеции.

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Разобрать задачи 1 и 2 на с. 204 учебника.
2. Сформулировать свойство средней линии треугольника.
3. Решить самостоятельно задачу.

***Задача.*** В трапеции $ABCD$ точка $O$ – точка пересечения диагоналей $BC$ и $AD$. Докажите, что точки $M$, $N$ и $O$ лежат на одной прямой.

### III. Определение темы урока

1. *Дано:* Трапеция $ABCD$, $M$ – середина $AB$, $N$ – середина $CD$ (рис. 9.63). Как можно назвать отрезок $MN$?

2. Сформулируйте тему нашего урока.

3. Сформулируйте определение средней линии трапеции.

4. Какими свойствами обладает средняя линия трапеции?

### IV. Работа по теме урока

*Теорема:* Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

– Данное утверждение является теоремой и называется свойством средней линии трапеции.

Работа в группах.

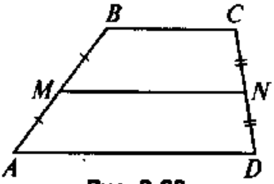



Рис. 9.63

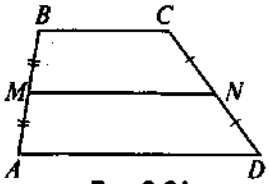



Рис. 9.64

***Задание.*** Докажите свойство средней линии трапеции.

(По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

На доске и в тетрадях краткая запись доказательства теоремы:

*Дано:* $ABCD$ – трапеция, $BC$ и $AD$ – основания, $MN$ – средняя линия трапеции (рис. 9.64).

*Доказать:* $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

*Доказательство:*

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$. (1)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. (2)

$$(1) + (2) = 2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{ND}) =$$

$$= \vec{0} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \vec{0} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

Так как $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, то $\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AD}\right| = BC + AD$, следовательно, $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Так как $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$, то $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$, следовательно, $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, т. е. $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$.

**V. Закрепление изученного материала**

1. Работа в парах.

Разобрать решение задач № 136, 135 (рабочая тетрадь, 8 класс) с последующей проверкой.

***Задача № 136***

*Дано:* Прямая $OT$ параллельна основанию $CD$ трапеции $ABCD$, причем $AO = OD$ (рис. 9.65).

*Доказать:* Отрезок $OT$ – средняя линия трапеции.

*Доказательство:* В соответствии с определением средней линии трапеции нужно доказать, что точка $T$ является серединой стороны $BC$.

Предположим, что это не так, и пусть серединой стороны $BC$ является точка $X$. Тогда отрезок $OX$ – средняя линия трапеции, поэтому $OX \parallel CD$. Но по условию задачи $OT \parallel CD$.

Итак, через точку $O$ проходят две прямые, параллельные прямой $CD$, что противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, точка $T$ – середина стороны $BC$, т. е. отрезок $OT$ – средняя линия трапеции, что и требовалось доказать.

***Задача № 135***

*Дано:* В трапеции $ABCD$ $AK = KB$, $CM = MD$, $BP = PK$, $CT = TM$, $BC = 2$ м, $AD = 8$ м (рис. 9.66).

*Найти:* $PT$.

*Решение:* Так как $AK = KB$ и $CM = MD$, то отрезок $KM$ – средняя линия трапеции, следовательно, $KM \parallel BC$ и $KM = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(2 + 8) = 5$ м.

В четырехугольнике $BCMK$ стороны $BC$ и $KM$ параллельны, а стороны $BK$ и $CM$ не параллельны, следовательно, $BCMK$ – трапеция. По условию задачи $BP = PK$ и $CT = TM$, поэтому отрезок $PT$ – средняя линия трапеции $BCMK$, и, следовательно, $PT = \frac{1}{2}(BC + KM) = \frac{1}{2}(2 + 5) = 3{,}5$ м.

*Ответ:* 3,5 м.

2. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой. Решить задачи № 794, 796, 797, дополнительные задачи № 1, 2.

***Задача № 794***

*Решение:* Так как $KM = MA$, $MN \parallel KP$, то $MN$ – средняя линия $\Delta AKP$ и $MN = \frac{1}{2}KP$ (рис. 9.67), следовательно, $KP = 2 \cdot 3{,}4 = 6{,}8$.

В треугольнике $ABC$ $KP \parallel BC$, $BK = KA$, значит, $KP$ – средняя линия $\Delta ABC$, следовательно, $BC = 2 \cdot KP = 2 \cdot 6{,}8 = 13{,}6$.

В четырехугольнике $BKPC$ $BC \parallel KP$, $BK \parallel PC$, следовательно, $BKPC$ – трапеция, $FE = \frac{1}{2}(KP + BC) = \frac{1}{2}(6{,}8 + 13{,}6) = 10{,}2$.

*Ответ:* 6,8; 10,2.

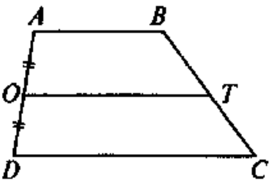



**Рис. 9.65**

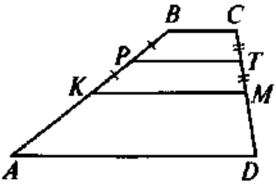



**Рис. 9.66**

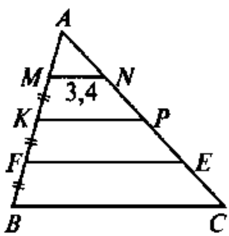



**Рис. 9.67**

***Задача № 796***

*Решение:* $C_1D_1$ – касательная к окружности, следовательно, $OK \perp C_1D_1$ (рис. 9.68). Так как $CC_1 \perp C_1D_1$, $DD_1 \perp CD_1$ по условию, то $CC_1 \parallel DD_1 \parallel OK$.

$O$ – середина $CD$, значит, $OK$ – средняя линия трапеции $CC_1D_1D$. $OK$ – радиус окружности, следовательно, $OK = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13{,}5$ см.

Так как $OK$ – средняя линия трапеции $CC_1D_1D$, то $OK = \frac{1}{2}(CC_1 + D_1D)$, отсюда $\frac{1}{2}DD_1 = OK - \frac{1}{2}CC_1$, следовательно, $DD_1 = 2 \cdot OK - CC_1 = 2 \cdot 13{,}5 - 11 = 16$ см.

*Ответ:* 16 см.

***Задача № 797***

*Решение:* Так как $EM$ – средняя линия трапеции, то $EM \parallel BC \parallel AD$. $AE = EB$, $EK \parallel BC$ (рис. 9.69). Отсюда по теореме Фалеса $AK = KC$, т. е. $K$ – середина диагонали $AC$.

$DM = MC$, $MN \parallel BC$. Отсюда по теореме Фалеса $DN = NB$, т. е. $N$ – середина диагонали $BD$.

Так как $N$ и $K$ – середины диагоналей трапеции и $K$ и $N$ лежат на $EM$, то средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** В трапеции $ABCD$ угол $A$ прямой, угол $C$ равен 135°, $AB = 5$ см, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, $AD$ и $BC$ – основания трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

*Ответ:* 7,5 см.

***Задача 2.*** В равнобедренной трапеции один из углов равен 120°, боковая сторона равна 8 см, а меньшее основание равно 6 см. Найдите среднюю линию трапеции.

*Ответ:* 10 см.

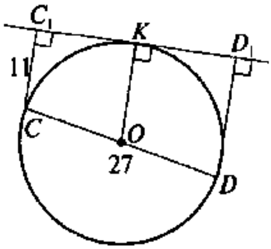



Рис. 9.68

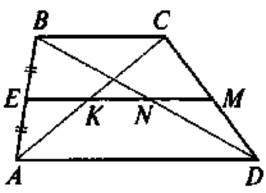



Рис. 9.69

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самоoценка.)

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи или одна задача решена правильно и частично решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача или при решении двух задач допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте определение средней линии трапеции.
2. Сформулируйте свойство средней линии трапеции.

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 793, 795, 798 (учебник), № 137 (рабочая тетрадь, 8 класс); II уровень сложности: № 793, 795, 798, дополнительную задачу.

*Дополнительная задача*

В равнобедренной трапеции диагональ составляет с основанием угол в 30°, а ее высота равна 4 см. Найдите среднюю линию трапеции.

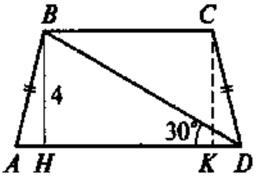


Рис. 9.70

*Решение:* Проведем высоту трапеции $BH$, тогда в треугольнике $BDH$ $\angle H = 90°$, $\angle D = 30°$, $BH = 4$ см $\Rightarrow BD = 2 \cdot BH = 8$ см (рис. 9.70). По теореме Пифагора $DH^2 = BD^2 - BH^2 = 64 - 16 = 48$, $BC = 4\sqrt{3}$ см.

Проведем высоту $CK$, тогда $HK = DH - KD = 4\sqrt{3} - KD \Rightarrow BC = HK = 4\sqrt{3} - KD$. Так как $ABCD$ – равнобедренная трапеция, то $AH = KD$ и $AD = AH + HD = KD + 4\sqrt{3}$.

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, т. е. $\frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}\left(\left(4\sqrt{3}KD\right) + \left(KD + 4\sqrt{3}\right)\right) = 4\sqrt{3}$ см.

*Ответ:* $4\sqrt{3}$ см.

## Урок 13. Подготовка к контрольной работе по теме «Векторы»

***Основные дидактические цели урока:*** закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки; подготовить учащихся к контрольной работе; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Теоретический тест с последующей самопроверкой

(Учащиеся решают задания в тетрадях, ответы выписывают на листочки и сдают на проверку учителю, правильность своих ответов проверяют по тетрадям.)

***Вариант 1***

1. Заполните пропуски так, чтобы получилось верное утверждение.

а) Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются сонаправленными, если ... .

б) $\vec{m} = \vec{n}$, если ... .

в) Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ противоположно направлены, если ... .

г) Если $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = ...$ .

2. Установите истинность утверждений.

а) Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$.

б) Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

в) Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они одинаково направлены.

3. $ABCD$ – квадрат, $AB = 5$ (рис. 9.71).

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$ равен:

а) 10;

б) $5\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{10}$.

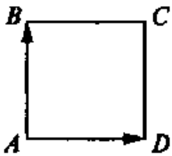


Рис. 9.71

4. Упростите выражение $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{QM} - \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{CF}$.

а) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{MN}$; в) $\overrightarrow{MN}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $O$. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ вектор $\overrightarrow{OA}$.

а) $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;

б) $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;

в) $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

***Вариант 2***

1. Заполните пропуски так, чтобы получилось верное утверждение.

   а) Ненулевые векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ называются противоположно направленными, если ... .

   б) $\vec{a} = -\vec{b}$, если ... .

   в) Векторы $\vec{c}$ и $k\vec{c}$ сонаправлены, если ... .

   г) Если $ABCD$ – ромб, то $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \ldots$ .

2. Установите истинность утверждений.

   а) Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k$ называется такой вектор $\vec{b}$, что $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

   б) Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее противоположных сторон.

   в) От любой точки $M$ можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

3. $ABCD$ – квадрат, $AB = 4$ (рис. 9.72).

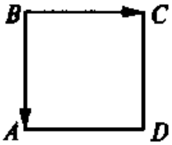


Рис. 9.72

$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ равен:

   а) 8;

   б) $4\sqrt{2}$;

   в) $\sqrt{8}$.

4. Упростите выражение $\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{OA}$.

   а) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DC}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $O$. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ вектор $\overrightarrow{OD}$.

   а) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;

   б) $\overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;

   в) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

***Ответы к тесту:***

***Вариант 1***

1. а) ... если они коллинеарны и одинаково направлены.

   б) ... если $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$ и $|\vec{m}| = |\vec{n}|$.

   в) ... если $k < 0$.

   г) ... если $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

2. а) ложное; б) истинное; в) ложное.

3 – б; 4 – а; 5 – б.

*Вариант 2*

1. а) ... если они коллинеарны и направлены противоположно.

б) ... если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{в}$и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

в) ... если $k > 0$.

г) ... если $\overline{CB} + \overline{CD} = \overline{CA}$.

2. а) ложное; б) ложное; в) истинное.

3 – а; 4 – в; 5 – б.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 9–10 баллов;
- оценка «4» – 7–8 баллов;
- оценка «3» – 5–6 баллов;
- оценка «2» – менее 5 баллов.

**III. Актуализация знаний учащихся**

Работа в парах.

Решить задачи по готовым чертежам с последующей проверкой по готовым ответам.

1. Рис. 9.73.

Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

2. Рис. 9.74.

*Найти:* $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|$; $|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$.

3. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм. $BE : EC = 3 : 2$; $DK : KC = 1 : 4$ (рис. 9.75).

Выразить через $\vec{x}$ и $\vec{y}$ векторы $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{EK}$.

4. Рис. 9.76.

*Найти:* Среднюю линию трапеции $ABCD$.

5. Рис. 9.77.

*Найти*: Среднюю линию трапеции $ABCD$.

6. Рис. 9.78.

*Найти:* Среднюю линию трапеции $ABCD$.

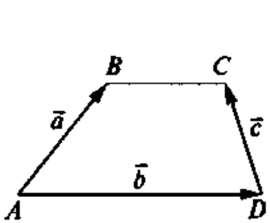



Рис. 9.73

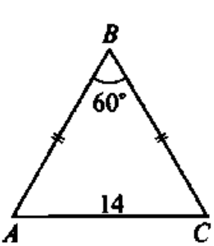



Рис. 9.74

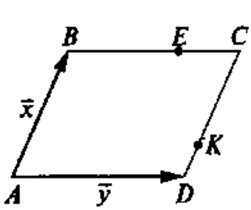



Рис. 9.75

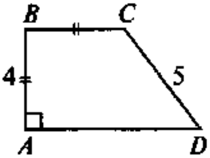



Рис. 9.76

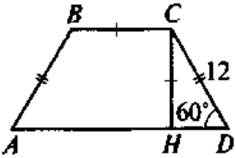



Рис. 9.77

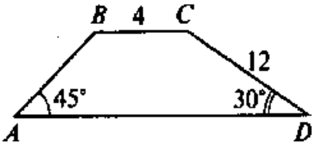



Рис. 9.78

*Ответы к задачам по готовым чертежам:*

1. $\overline{BD} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overline{AC} = \vec{b} + \vec{c}$; $\overline{BC} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$.

2. $\left|\overline{AC} + \overline{CB}\right| = 14$; $\left|\overline{AC}\right| + \left|\overline{CB}\right| = 28$.

3. $\overline{AE} = \vec{x} + \frac{3}{5}\vec{y}$; $\overline{AK} = \frac{1}{5}\vec{x} + \vec{y}$; $\overline{DE} = \vec{x} - \frac{2}{5}\vec{y}$; $\overline{BK} = \vec{y} - \frac{4}{5}\vec{x}$; $\overline{EK} = \frac{2}{5}\vec{y} - \frac{4}{5}\vec{x}$.

4. 5,5.

5. $6 + 6\sqrt{3}$.

6. $7 + 3\sqrt{3}$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» — правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» — правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» — правильно решена одна задача или все задачи решены неправильно.

## IV. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

1. В трапеции $ABCD$ $AB = CD$, высота $BH$ делит основание на два отрезка, меньший из которых равен 5 см. Найдите $AD$, если средняя линия трапеции равна 9 см.

2. На стороне $BC$ прямоугольника $ABCD$ отмечена точка $K$ так, что $BK : KC = 3 : 4$. Выразите векторы $\overline{AK}$, $\overline{DK}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{AD}$.

3. Точки $P$ и $E$ лежат соответственно на сторонах $BC$ и $DC$ параллелограмма $ABCD$ так, что $BP = PC$ и $DE : EC = 1 : 2$. Выразите через векторы $\vec{m} = \overline{AB}$, $\vec{n} = \overline{AD}$ векторы $\overline{AP}$, $\overline{AE}$, $\overline{DP}$, $\overline{BE}$, $\overline{PE}$.

4. В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона равна 12 см, а большая составляет с большим основанием угол 45°. Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 20 см.

5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle A = \angle D = 45°$, $BC = 4$ см, а высота трапеции равна 3 см. Найдите среднюю линию трапеции.

6. В трапеции $MHKP$ $\angle M = 90°$, $\angle K = 150°$, $HK = 2$ см, диагональ $MK$ перпендикулярна боковой стороне $KP$. Найдите среднюю линию трапеции.

7. Дан треугольник $ABC$. Постройте вектор:

а) $-3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$;

б) $-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$.

8. Из условия $\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{OD} + \vec{x} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AO}$ найдите длину вектора $\vec{x}$.

9. Из условия $\vec{m} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{KP}$ найдите длину вектора $\vec{m}$.

**II уровень сложности**

1. Точки $A$ и $B$ лежат соответственно на сторонах $NK$ и $KP$ трапеции $MNKP$ так, что $NA = AK$, $2KB = BP$. Выразите векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$, $\vec{b} = \overrightarrow{MP}$, если известно, что основание $NK$ равно половине $MP$.

2. Точки $P$ и $E$ – середины сторон $BC$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AE}$.

3. В равнобедренной трапеции диагональ, равная 10 см, составляет с основанием угол в 45°. Найдите среднюю линию трапеции.

4. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 15 см, а ее средняя линия 12 см. Найдите периметр трапеции.

5. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, где $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ – медианы треугольника $ABC$.

6. Докажите, что если для четырехугольника $ABCD$ и произвольной точки $O$ выполняется равенство $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, то этот четырехугольник – параллелограмм.

7. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $O$, точка $E$ лежит на стороне $CD$ так, что $DE : EC = 2 : 5$. Выразите вектор $\overrightarrow{OE}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$.

8. В треугольнике $ABC$ $AB = 15$ см, $BC = 17$ см, $AC = 8$ см. Выразите вектор $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{BK}$.

9. На окружности с центром $O$ постройте такие точки $a$, $b$, $c$, что:

а) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$;

б) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$;

в) $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = \overrightarrow{OC}$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «4» — правильно решены три задачи или правильно решены две задачи, а при решении третьей задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» — правильно решены две задачи или правильно решена одна задача, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «2» — правильно решена одна задача.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение теоретического теста, за решение задач по готовым чертежам и за самостоятельное решение задач.)

### V. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи № 1–5 (самостоятельная работа), с которыми не справилось большинство учащихся.)

### Домашнее задание

Решить задачи № 6–9 (самостоятельная работа).

(Ученики решают задачи, с которыми не справились на самостоятельной работе.)

## Урок 14. Контрольная работа № 1 по теме «Векторы»

***Основная дидактическая цель урока:*** проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Векторы».

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Контрольная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы, равные: а) $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $2\vec{b} - \vec{a}$.

2. На стороне $BC$ ромба $ABCD$ лежит точка $K$ так, что $BK = KC$, $O$ – точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\overline{AO}$, $\overline{AK}$, $\overline{KD}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AB}$ и $\vec{b} = \overline{AD}$.

3. В равнобедренной трапеции высота делит большее основание на отрезки, равные 5 см и 12 см. Найдите среднюю линию трапеции.

4*. В треугольнике $ABC$ точка $O$ – точка пересечения медиан. Выразите вектор $\overline{AO}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AB}$ и $\vec{b} = \overline{AC}$.

***Вариант 2***

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте векторы, равные: а) $\frac{1}{3}\vec{m} + 2\vec{n}$; б) $3\vec{n} - \vec{m}$.

2. На стороне $CD$ квадрата $ABCD$ лежит точка $P$ так, что $CP = PD$, $O$ – точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\overline{BO}$, $\overline{BP}$, $\overline{PA}$ через векторы $\vec{x} = \overline{BA}$ и $\vec{y} = \overline{BC}$.

3. В равнобедренной трапеции один из углов равен 60°, боковая сторона равна 8 см, а меньшее основание – 7 см. Найдите среднюю линию трапеции.

4*. В треугольнике $MNK$ точка $O$ – точка пересечения медиан, $\overline{MN} = \vec{a}$, $\overline{MK} = \vec{y}$, $\overline{MO} = k \cdot (\vec{x} + \vec{y})$. Найдите число $k$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Постройте векторы, равные: а) $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$; б) $-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + 0{,}5\vec{c}$.

2. На сторонах $BC$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ отмечены точки $K$ и $E$ так, что $BK = KC$, $CE : ED = 2 : 3$. Выразите векторы $\overline{AK}$, $\overline{AE}$, $\overline{KE}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AB}$ и $\vec{b} = \overline{AD}$.

3. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 60°$, $\angle D = 45°$, боковые стороны равны 10 см и 12 см, а меньшее основание 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.

4*. В треугольнике $ABC$ точка $B_1$ – середина $AC$, точка $A_1$ лежит на стороне $BC$ так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 2$. Используя векторы, докажите, что середина $BB_1$ лежит на прямой $AA_1$.

***Вариант 2***

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Постройте векторы, равные: а) $\frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{4}\vec{x}$; б) $0{,}2\vec{z} - \vec{y} + \frac{3}{5}\vec{x}$.

2. На сторонах $AB$ и $AD$ параллелограмма $ABCD$ отмечены точки $M$ и $N$ так, что $AM = MB$, $AN : ND = 3 : 4$. Выразите векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{CB}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{CD}$.

3. В трапеции $MNKP$ $\angle M = 45°$, $\angle P = 30°$, боковые стороны равны 8 см и 10 см, а меньшее основание — 5 см. Найдите среднюю линию трапеции.

4*. В трапеции $ABCD$ $BC : AD = 1 : 2$, $E$ — середина боковой стороны $CB$, точка $M$ лежит на $AE$ так, что $AM : ME = 4 : 1$. Используя векторы, докажите, что точка $M$ лежит на диагонали $BD$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $ABCD$ и $ADEF$ — параллелограммы, имеющие общую сторону. Постройте вектор $\vec{x}$ такой, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \vec{x} = \overrightarrow{DE}$.

2. На стороне $CD$ и диагонали $AC$ параллелограмма $ABCD$ лежат точки $P$ и $E$ так, что $DP : PC = 3 : 2$, $AE : EC = 4 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{EP}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

3. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно меньшей боковой стороне, один из углов 45°, а средняя линия 10 см. Найдите периметр трапеции.

4*. В трапеции $ABCD$ основания $AD$ и $BC$ относятся как $3 : 1$, $E$ — середина стороны $AB$. Докажите, что $DE < \frac{2}{3}DA + \frac{1}{2}DC$.

***Вариант 2***

1. $ABCD$ и $CFED$ — параллелограммы, имеющие общую сторону. Постройте вектор $\vec{y}$ такой, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CD} + \vec{y} = \overrightarrow{AD}$.

2. На стороне $AB$ и диагонали $BD$ параллелограмма $ABCD$ лежат точки $N$ и $M$ так, что $AN : NB = 3 : 2$, $BM : MD = 5 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{CB}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{CD}$.

3. В прямоугольной трапеции меньшее основание в 2 раза меньше меньшей боковой стороны, один из углов равен 135°, а средняя линия равна 14 см. Найдите периметр трапеции.

4*. В параллелограмме $ABCD$ точка $P$ — середина отрезка $CD$, $M$ — середина стороны $BC$, отрезки $BD$ и $AM$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $OP < \frac{2}{3}AD + \frac{1}{6}AB$.

*Ответы к задачам контрольной работы:*

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

2. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

3. 12 см.

4. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

***Вариант 2***

2. $\overline{BO} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$; $\overline{BP} = \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{x}$; $\overline{AP} = \vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}$.

3. 11 см.

4. $k = \frac{1}{3}$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

2. $\overline{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overline{AE} = \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{a}$; $\overline{KE} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$.

3. $10{,}5 + 3\sqrt{2}$ см.

***Вариант 2***

2. $\overline{CM} = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$; $\overline{CN} = \vec{y} + \frac{4}{7}\vec{x}$; $\overline{MN} = \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{3}{7}\vec{x}$.

3. $5 + 2\sqrt{2} + 2{,}5\sqrt{3}$ см.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $\vec{x} = \overline{DA}$.

2. $\overline{EP} = \frac{1}{35}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$.

3. $\frac{20}{3}(4 + \sqrt{2})$ см.

***Вариант 2***

1. $\vec{y} = \overline{ED}$.

2. $\overline{MN} = \frac{7}{5}\vec{x} - \vec{y}$.

3. $7(6 + \sqrt{2})$ см.

## III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту ответы к задачам контрольной работы.

## Домашнее задание

Решить контрольную работу следующего уровня сложности.

# Глава X
# МЕТОД КООРДИНАТ

***Формируемые УУД: предметные:*** научить находить координаты вектора, абсолютную величину вектора, раскладывать вектор по двум неколлинеарным векторам; научить учащихся решать простейшие задачи в координатах (находить координаты середины отрезка, длину вектора по его координатам, расстояние между точками); научить выполнять действия над векторами, заданными своими координатами; использовать уравнения окружности и прямой при решении задач; решать задачи на применение метода координат; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал; извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей.

## Урок 15. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

***Основные дидактические цели урока:*** рассмотреть лемму о коллинеарных векторах; доказать теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам; научить учащихся решать задачи на применение теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок, допущенных в контрольной работе

1. Провести общий анализ контрольной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

### III. Актуализация знаний учащихся

Работа в парах.

Решить задачи по готовым чертежам с последующей проверкой.

1. *ABCD* – параллелограмм (рис. 10.1). Выразите:

а) $\overrightarrow{AO}$ через $\overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$;

в) $\overrightarrow{MK}$ через $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OD}$;

г) $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

2. Выразите, если возможно (рис. 10.2):

а) $\overrightarrow{BC}$ через $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$;

б) $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$;

в) $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

### IV. Определение темы урока

(Учитель и учащиеся определяют тему и цель урока.)

### V. Работа по теме урока

1. Работа в группах.

(Ученики в группах решают задачу. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

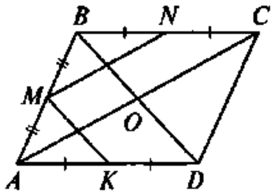



Рис. 10.1

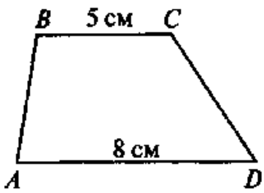



Рис. 10.2

***Задача.*** Всегда ли можно выразить один вектор через другой? Рассмотрите два случая:

а) векторы коллинеарны и ненулевые;

б) векторы не коллинеарны.

2. Фронтальная работа с классом.

1) Сформулировать лемму о коллинеарных векторах.

2) Ввести понятие разложения одного вектора по двум неколлинеарным векторам $\overline{p} = x\overline{a} + y\overline{b}$, где $x$, $y$ – коэффициенты разложения.

3) Сформулировать теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

(Учитель доказывает теорему (учебник, с. 223, 224).)

## VI. Закрепление изученного материала

1. Работа в парах.

Решить задачи № 1, 3 из рабочей тетради с последующим обсуждением.

***Задача № 1***

Найдите такое число $q$, чтобы выполнялось равенство $\vec{m} = n\vec{q}$, если:

а) $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см;

б) $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 0{,}7$ м, $|\vec{n}| = 2$ м.

*Решение:*

а) По условию задачи $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, т. е. $q > 0$, $|q| = \dfrac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|} = 2{,}5$, отсюда $q = 2{,}5$.

б) По условию задачи $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, т. е. $q < 0$, $|q| = \dfrac{|\vec{m}|}{\vec{n}} = -0{,}35$, отсюда $q = -0{,}35$.

*Ответ:* а) 2,5; б) –0,35.

***Задача № 2***

*Дано:* Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $M$, точка $H$ – середина отрезка $AM$.

Найдите, если это возможно, такое число $k$, чтобы выполнялось равенство: а) $\overline{AM} = k\overline{AC}$; б) $\overline{MH} = k\overline{AC}$; в) $\overline{DM} = k\overline{AC}$.

*Решение:*

а) $\overline{AM} \uparrow\uparrow \overline{AC}$, поэтому искомое число $k$ существует, $|k| = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AC}}$ и $k > 0$ (рис. 10.3). Так как диагонали параллелограмма точкой $M$ делятся пополам, то $|k| = \dfrac{1}{2}$. Итак, $k = \dfrac{1}{2}$;

б) $\overrightarrow{MH} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$, поэтому искомое число $k$ отрицательно, $|k| = \dfrac{MH}{AC}$ и $k < 0$. По условию задачи точка $H$ – середина отрезка $AM$, тогда $MH = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}(AC : 2) = \frac{1}{4}AC$, поэтому $|k| = \frac{1}{4}$. Итак, $k = -\frac{1}{4}$;

в) Векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{AC}$ не коллинеарны, поэтому искомого значения $k$ не существует.

*Ответ:* а) $k = \frac{1}{2}$; б) $k = -\frac{1}{4}$; в) не существует.

***Критерии оценивания:***

За каждое правильно выполненное задание (одно задание – одна буква) ставится 1 балл.

- оценка «5» – 4–5 баллов;
- оценка «4» – 3 балла;
- оценка «3» – 2 балла;
- оценка «2» – не ставится.

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 3 (рабочая тетрадь), № 912, 914 (а) (учебник).

***Задача 3***

*Дано:* В параллелограмме $ABCD$ $MK \parallel DC$ и $PT \parallel DA$ (рис. 10.4).

1) Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{DT}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$ векторы:

а) $\overrightarrow{DO}$; б) $\overrightarrow{DB}$.

2) Разложите вектор $\overrightarrow{OB}$ по векторам:

а) $\vec{m} = \overrightarrow{MO}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OP}$; б) $\vec{m} = \overrightarrow{MO}$, $\vec{n} = \overrightarrow{AD}$.

*Решение:*

1) По условию задачи $MK \parallel DC$, поэтому $\angle BOK = \angle BDC$. В треугольниках $BOK$ и $BDC$ угол $B$ общий, $\angle BOK = \angle BDC$, следовательно, $\Delta BOK \sim \Delta BDC$. Так как $BO = \frac{1}{2}BD$, то $BK = \frac{1}{2}BC$, следовательно, точка $K$ – середина стороны $BC$ параллелограм-

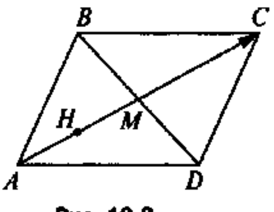



Рис. 10.3

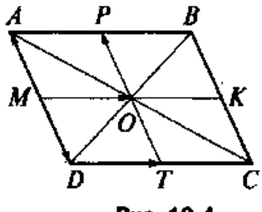



Рис. 10.4

ма. Аналогично точки $M$, $P$ и $T$ – середины сторон данного параллелограмма.

а) По правилу параллелограмма $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DT} + \overrightarrow{DM}$, но $\overrightarrow{DO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\vec{b}$. Итак, $\overrightarrow{DO} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

б) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{DA} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

2) а) По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} = \vec{m} + \vec{c}$.

б) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MO} + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$.

*Ответ:*

1) а) $\overrightarrow{DO} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, б) $\overrightarrow{DB} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

2) а) $\overrightarrow{OB} = \vec{m} + \vec{c}$, б) $\overrightarrow{OB} = \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание (одно задание – одна буква) ставится 1 балл.

- оценка «5» – 12–14 баллов;
- оценка «4» – 9–11 баллов;
- оценка «3» – 6–8 баллов;
- оценка «2» – менее 6 баллов.

3. Решить дополнительные задачи № 1, 2.

***Задача 1.*** В треугольнике $ABC$ медианы пересекаются в точке $O$. Через точку $O$ проведена прямая, параллельная $AB$ и пересекающая стороны $AC$ и $BC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Найдите, если возможно, такое число $k$, что:

а) $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BA}$;

б) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{NM}$;

в) $\overrightarrow{CO} = k\overrightarrow{CC_1}$, где $CC_1$ – медиана;

г) $\overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OC}$.

***Задача 2.*** В параллелограмме $ABCD$ точка $O$ – точка пересечения диагоналей, точка $E$ лежит на стороне $BC$ так, что $BE : EC = 2 : 3$. Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$ векторы: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CE}$.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за работу в парах и самостоятельное решение задач.)

### VII. Рефлексия учебной деятельности

1. Всегда ли можно выразить один вектор через другой?
2. Сформулируйте лемму о коллинеарных векторах.
3. Что значит «разложить вектор по двум неколлинеарным векторам»?
4. Как называются числа $x$ и $y$ в записи $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$?
5. Сформулируйте теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

### Домашнее задание

1. П. 89 (разобрать доказательство леммы о коллинеарных векторах), вопросы 1–3 (учебник, с. 244).
2. Решить задачу № 4 (рабочая тетрадь), задачи № 911, 914 (б, в), 915 (учебник).

## Урок 16. Координаты вектора

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятие координат вектора, координат разности и суммы двух векторов; научить учащихся решать простейшие задачи методом координат.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Теоретический опрос

1. Доказать лемму о коллинеарных векторах (один ученик).

2. Доказать теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам (один ученик).

### III. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задачи № 4 (устно) и задачи № 915. Один ученик заранее записывает решение на доске.)

***Задача № 4***

*Дано:* Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

Найдите числа $x$ и $y$ такие, что:

а) $2\vec{a} + x\vec{b} = y\vec{a} - \vec{b}$;

б) $x\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{a} + 4\vec{b} = \vec{0}$;

в) $4x\vec{a} - \vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$.

*Решение:*

а) В левой и правой частях данного равенства записаны разложения некоторого вектора по двум неколлинеарным векторам

$\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку такое разложение единственно, то коэффициенты перед вектором $\vec{a}$ равны, следовательно, $y = 2$. Аналогично получаем, что $x = -1$.

б) Запишем данное равенство в виде $(x - 3)\vec{a} + (1 + 4)\vec{b} = 0\vec{a} + 0\vec{b}$. Так как разложение вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единственно, то $x - 3 = 0$ и $1 + 4y = 0$. Отсюда получаем $x = 3$, $y = -\frac{1}{4}$.

в) В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам получаем $4x - 1 = 0$ и $y = 0$.

Следовательно, $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$.

*Ответ:* а) $x = -1$, $y = 2$; б) $x = 3$, $y = -\frac{1}{4}$; в) $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$.

***Задача № 915***

***Решение:*** $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 10.5).

Так как $AM : MC = 4 : 1$,

то $AM = \frac{4}{5}AC$, следовательно,

$\overline{AM} = \frac{4}{5}\overline{AC} = \frac{4}{5}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$.

*Ответ:* $\overline{AM} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$.

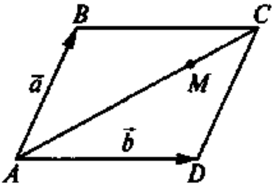


**Рис. 10.5**

## IV. Самостоятельное решение задач

*I уровень сложности:* задача № 916.

*II уровень сложности:* дополнительные задачи № 1, 2.

***Задача 1.*** В треугольнике $MNK$ точка $A$ лежит на стороне $NK$ так, что $\frac{NA}{AK} = \frac{3}{7}$. Разложите вектор $\overline{MA}$ по векторам $\vec{x} = \overline{MN}$ и $\vec{y} = \overline{MK}$.

***Задача 2.*** В треугольнике $ABC$ точки $M$ и $N$ лежат на сторонах $AB$ и $BC$ так, что $BM : MA = 4 : 1$ и $BN : NC = 4 : 1$. Используя векторы, докажите, что $MN \parallel AC$.

## V. Определение темы урока

1. Повторить прямоугольную систему координат: оси координат, начало координат, единичный отрезок.

2. Решить задачи.

***Задача 1.*** Найдите длину $\overline{AB}$, если $A(3; 5)$, $B(3; 9)$.

***Задача 2.*** Найдите длину $\overline{MC}$, если $M(9;\ 7)$, $C(9;\ 1)$.

***Задача 3.*** Коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{MC}$?

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

### VI. Работа по теме урока

1. Ввести понятие координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис. 10.6).

$\vec{i} \uparrow\uparrow Ox$, $|\vec{i}| = 1$, $\vec{j} \uparrow\uparrow Oy$, $|\vec{j}| = 1$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – координатные векторы.

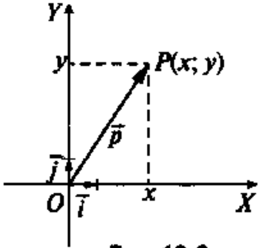



**Рис. 10.6**

2. Ввести понятие координат вектора.

$\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны, значит, любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$: $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Числа $x$ и $y$ для данного вектора определяются единственным образом.

$\vec{p}\{x; y\}$, где $x$, $y$ – координаты вектора $\vec{p}$.

*Примеры:*

Рис. 10.7.

$\overline{OA} = 4\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow \overline{OA}\{4;\ 5\}$.

$\overline{OB} = -6\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \overline{OB}\{-6;\ 2\}$.

$\vec{c} = 5\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow \vec{c}\{5;\ -3\}$.

$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} \Rightarrow \vec{0}\{0;\ 0\}$.

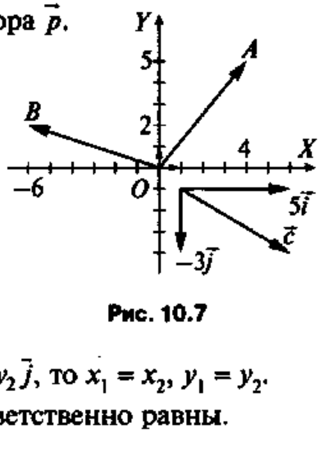



**Рис. 10.7**

3. Координаты равных векторов.

Если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, то $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Координаты равных векторов соответственно равны.

4. Работа в группах.

(Учитель делит класс на две группы. Каждая группа получает одно из заданий. Дать на обдумывание 2–3 мин, а затем заслушать доказательство. В тетрадях учащиеся записывают план доказательства и основные выводы.)

***Задание 1.*** Координаты суммы векторов.

*Доказать:*

Если $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$; $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c}\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}$.

*Доказательство:*

$\vec{a}\{x_1;\ y_1\} \Rightarrow \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\} \Rightarrow \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} \Rightarrow$

$\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

***Задание 2.*** Координаты разности двух векторов.

*Доказать:*

Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$; $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{c}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$.

***Задание 3.*** Координаты произведения вектора на число.

*Доказать:*

Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $k$ – произвольное число, $\vec{c} = k\vec{a}$, то $\vec{c}\{kx_1; ky_1\}$.

**VII. Закрепление изученного материала**

1. Самостоятельное решение задачи с последующей проверкой.

Решить задачу № 5 (рабочая тетрадь) устно.

***Задача № 5***

а) Какой из векторов, изображенных на рис. 10.8, равен вектору $4\vec{i} - 2\vec{j}$?

б) Напишите разложение вектора $\overline{OE}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

в) Найдите координаты вектор $\overline{OA}$.

г) Напишите, какой вектор имеет координаты {–4; 2}.

д) Отложите от точки $O$ вектор с координатами {2; –4}.

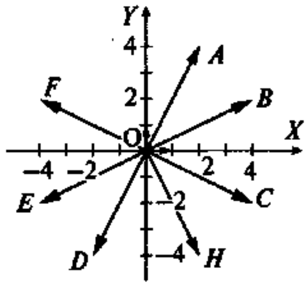


**Рис. 10.8**

*Ответ:* а) $\overline{OC}$; б) $\overline{OE} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$; в) $\overline{OA}\{2; 4\}$; г) $\overline{OK}$.

2. Работа в парах.

Решить задачу № 8 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

***Задача № 8***

*Дано:* Векторы $\vec{a}\{2; -3\}$ и $\vec{b}\{-1; 5\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{n} = 4\vec{a}$; в) $\vec{k} = -\vec{b}$; г) $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

*Решение:* Используя утверждения о координатах суммы векторов и произведения вектора на число, получаем:

а) $\vec{m}\{2 + (-1); -3 + 5\}$, т. е. $\vec{m}\{1; 2\}$;

б) $\vec{n}\{4 \cdot 2; 4 \cdot (-3)\}$, т. е. $\vec{n}\{8; -12\}$;

в) $\vec{k}\{-(-1); -5\}$, т. е. $\vec{k}\{1; 5\}$;

г) обозначим через $x_1$ и $y_1$ абсциссу и ординату вектора $\vec{a}$, через $x_2$ и $y_2$ – абсциссу и ординату вектора $\vec{b}$, буквами $x$ и $y$ – абсциссу и ординату вектора $\overline{p}$.

Тогда $x = 4x_1 - 3x_2 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 11$; $y = 4y_1 - 3y_2 = 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 5 = -27$.

Следовательно, $\overline{p}\{11; -27\}$.

*Ответ:* а) $\vec{m}\{1; 2\}$; б) $\vec{n}\{8; -12\}$; в) $\vec{k}\{1; 5\}$; г) $\overline{p}\{11; -27\}$.

3. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 917, 920, 921, 926 (а, в).

***Задача № 926 (а, в)***

а) *Дано:* $\vec{v} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{a}\{2; -5\}$; $\vec{b}\{-5; 2\}$.

***Найти:*** Координаты вектора $\vec{v}$.

***Решение:*** $\vec{v} = 3\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{v}\{3 \cdot 2 - 3 \cdot (-5);\ 3 \cdot (-5) - 3 \cdot 2\} = \vec{v}\{21; -21\}$.

в) *Дано:* $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{a}\{-7; -1\}$; $\vec{b}\{-1; 7\}$; $\vec{c}\{4; -6\}$.

***Найти:*** Координаты вектора $\vec{v}$.

***Решение:*** $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} =$

$$= \vec{v}\left\{3 \cdot (-7) - 2 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 4;\ 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot (-6)\right\} = \vec{v}\{-21; -14\}.$$

*Ответ:* а) $\vec{v}\{21; -21\}$; б) $\vec{v}\{-21; -14\}$.

***Критерии оценивания:***

За каждое правильно выполненное задание (одно задание – одна буква) ставится 1 балл.

- оценка «5» – 10–11 баллов;
- оценка «4» – 7–9 баллов;
- оценка «3» – 5–6 баллов;
- оценка «2» – менее 5 баллов.

4. Самостоятельное решение задач.

Решить дополнительные задачи № 1–3.

***Задача 1.*** *Дано:* Векторы $\vec{a}\{2; -4\}$ и $\vec{b}\{-5; 3\}$.

Разложите по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\overline{m} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.

***Задача 2.*** *Дано:* $OA = OC = 10$, $OB = 6$, $AC \parallel OY$ (рис. 10.9).

Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC}$.

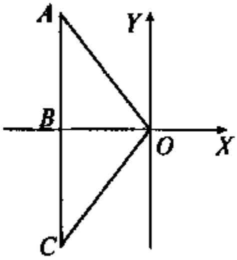



**Рис. 10.9**

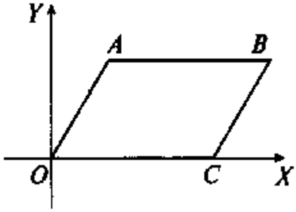



**Рис. 10.10**

*Задача 3. Дано: $OABC$* – параллелограмм, $OA = 6$, $OC = 8$, $\angle AOC = 60°$ (рис. 10.10).

Разложите векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

### VIII. Рефлексия учебной деятельности

1. Какие векторы называются координатными?
2. Чему равны координаты вектора, если вектор можно разложить по координатным векторам?
3. Что вы можете сказать о координатах равных векторов?
4. Как найти координаты суммы двух векторов?
5. Как найти координаты разности векторов?
6. Как найти координаты произведения вектора на число?

### Домашнее задание

1. П. 90, вопросы 7–8 (учебник, с. 244).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 918, 919, 926 (б, г) (учебник), № 6, 7 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 918, 919, 926 (б, г), 927, 928.

## Урок 17. Простейшие задачи в координатах

***Основная дидактическая цель урока:*** совершенствовать навыки решения задач методом координат; рассмотреть простейшие задачи в координатах и показать их применение в решении задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 927, 928.)

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 922, 923, 924, 925 (устно).

## III. Самостоятельная работа проверочного характера

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ 4\}$ и $\vec{b}\{-3;\ 2\}$.

Найдите координаты векторов:

а) $\vec{m} = 3\vec{a}$; в) $\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$;

б) $\vec{n} = -\vec{b}$; г) $\vec{l} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$.

2. Среди векторов $\vec{a}\{-1;\ 3\}$, $\vec{b}\{2;\ 6\}$, $\vec{c}\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right\}$, $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3};\ -1\right\}$ укажите пары коллинеарных векторов.

***Вариант 2***

1. Даны векторы $\vec{x}\{6;\ 3\}$ и $\vec{y}\{-2;\ 1\}$.

Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{x}$; в) $\vec{c} = \vec{x} + 2\vec{y}$;

б) $\vec{b} = -\vec{y}$; г) $\vec{d} = 2\vec{x} - 3\vec{y}$.

2. Среди векторов $\vec{a}\{2;\ 5\}$, $\vec{b}\{-4;\ 10\}$, $\vec{c}\{-1;\ -2{,}5\}$, $\vec{d}\{0{,}4;\ -1\}$ укажите пары коллинеарных векторов.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -2\}$, $\vec{b}\{-3;\ 2\}$ и $\vec{c}\{-2;\ -3\}$.

а) Найдите координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

б) Запишите разложение вектора $\vec{x}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

в) Найдите координаты вектора $\vec{y}$, противоположного вектору $\vec{x}$.

2. Среди векторов $\vec{a}\left\{-5\frac{1}{3};\ 0\right\}$, $\vec{b}\left\{0;\ 10\frac{2}{3}\right\}$, $\vec{c}\left\{2\frac{2}{3};\ 0\right\}$, $\vec{d}\left\{0;\ -5\frac{1}{3}\right\}$, $\vec{e}\left\{0;\ -5\frac{1}{3}\right\}$ укажите пары неколлинеарных векторов.

***Вариант 2***

1. Даны векторы $\vec{m}\{2;\ -1\}$, $\vec{n}\{-3;\ 4\}$ и $\vec{k}\{-1;\ -5\}$.

а) Найдите координаты вектора $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{k}$.

б) Запишите разложение вектора $\vec{a}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

в) Найдите координаты вектора $\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{a}$.

2. Среди векторов $\vec{m}\left\{7\frac{1}{5};\ 0\right\}$, $\vec{n}\left\{-1\frac{3}{5};\ 0\right\}$, $\vec{k}\left\{0;\ -3\frac{3}{5}\right\}$, $\vec{l}\left\{1\frac{3}{5};\ 3\frac{3}{5}\right\}$, $\vec{p}\left\{0;\ 1\frac{4}{5}\right\}$ укажите пары неколлинеарных векторов.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

В параллелограмме $ABCD$ $\overrightarrow{AB}\{2;\ 5\}$, $\overrightarrow{AD}\{3;\ -4\}$ точки $M$ и $N$ лежат на сторонах $BC$ и $CD$ соответственно так, что $BM = MC$, $CN : ND = 3 : 1$.

а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MN}$.

б) Запишите разложение вектора $\overrightarrow{MN}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

в) Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

***Вариант 2***

В параллелограмме $ABCD$ $\overrightarrow{CB}\{3;\ 4\}$, $\overrightarrow{CD}\{4;\ -2\}$ точки $K$ и $P$ лежат на сторонах $AB$ и $AD$ соответственно так, что $AK : KB = 2 : 1$, $AD = PD$.

а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{KP}$.

б) Запишите разложение вектора $\overrightarrow{KP}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

в) Найдите длину вектора $\overrightarrow{CA}$.

*Ответы к задачам самостоятельной работы:*

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. а) $\vec{m}\{6;\ 12\}$; б) $\vec{n}\{3;\ -2\}$; в) $\vec{k}\{-5;\ 6\}$; г) $\vec{l}\{18;\ 4\}$.
2. $\vec{a}$ и $\vec{c}$; $\vec{b}$ и $\vec{d}$.

***Вариант 2***

1. а) $\vec{a}\{2;\ 1\}$; б) $\vec{b}\{2;\ -1\}$; в) $\vec{c}\{2;\ 5\}$; г) $\vec{d}\{18;\ 3\}$.
2. $\vec{a}$ и $\vec{c}$; $\vec{b}$ и $\vec{d}$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. а) $\vec{x}\{9;\ -13\}$; б) $\vec{x} = 9\vec{i} - 13\vec{j}$; в) $\vec{y}\{-9;\ 13\}$.
2. $\vec{a}$ и $\vec{c}$; $\vec{a}$ и $\vec{d}$; $\vec{a}$ и $\vec{e}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{b}$ и $\vec{e}$; $\vec{c}$ и $\vec{d}$; $\vec{c}$ и $\vec{e}$; $\vec{d}$ и $\vec{e}$.

***Вариант 2***

1. а) $\vec{a}\{1;\ 10\}$; б) $\vec{a} = \vec{i} + 10\vec{j}$; в) $\vec{b}\{-1;\ -10\}$.

2. $\vec{m}$ и $\vec{k}$; $\vec{m}$ и $\vec{e}$; $\vec{m}$ и $\vec{p}$; $\vec{n}$ и $\vec{k}$; $\vec{n}$ и $\vec{l}$; $\vec{n}$ и $\vec{p}$; $\vec{k}$ и $\vec{l}$; $\vec{l}$ и $\vec{p}$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

а) $\overrightarrow{MN}\left\{0;\ -6\frac{1}{4}\right\}$; б) $\overrightarrow{MN} = -6\frac{1}{4}\vec{j}$; в) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{26}$.

***Вариант 2***

а) $\overrightarrow{KP}\left\{-\frac{1}{6};\ -2\frac{2}{3}\right\}$; б) $\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{6}\vec{i} - 2\frac{2}{3}\vec{j}$; в) $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{53}$.

## IV. Определение темы урока

Фронтальная работа с классом.

Решить задачу.

***Задача.*** В параллелограмме $ABCD$ вершины заданы своими координатами: $A(2;\ 3)$; $B(1;\ 3)$; $C(9;\ 3)$; $D(6;\ -3)$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей и периметр параллелограмма.

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## V. Изучение нового материала

1. Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца (П. 91 учебника).

а) Ввести понятие радиус-вектора.

б) Доказать, что координаты точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

в) Доказать, что каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

2. Простейшие задачи в координатах (П. 92 учебника).

а) Координаты середины отрезка.

б) Вычисление длины вектора по его координатам.

в) Расстояние между двумя точками.

(В ходе изложения нового материала учитель записывает краткий план-конспект на доске, ученики – в тетрадях.)

*Радиус-вектор точки:*

Рис. 10.11.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1}\{x_1;\ 0\} + \overrightarrow{OA_2}\{0;\ y_1\} = \overrightarrow{OA}\{x_1;\ y_1\}$, $\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки $A$.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{OA}\{x_1;\ y_1\}$; $\overrightarrow{OB}\{x_2;\ y_2\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$.

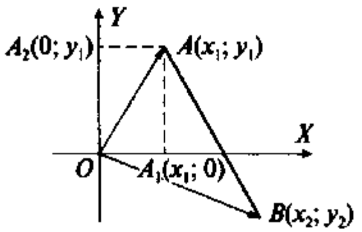



**Рис. 10.11**

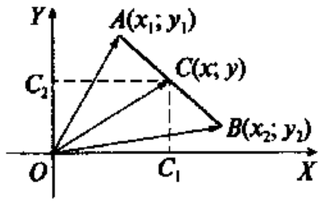



**Рис. 10.12**

*Координаты середины отрезка:*

Рис. 10.12.

$C$ – середина отрезка $AB \Rightarrow \overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) = \frac{1}{2}\left(\overline{OA}\{x_1; y_1\} + \right.$

$\left. + \overline{OB}\{x_2; y_2\}\right) = \overline{OC}\left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right\} \Rightarrow C\left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right\} \Rightarrow$

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$

*Длина вектора:*

$|\overline{OC}| = \sqrt{OC_1^2 + C_1C^2}$; $OC_1 = x$; $C_1C = OC_2 = y$; $|\overline{OC}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

*Расстояние между двумя точками:*

$\overline{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\} \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

## VI. Закрепление изученного материала

1. Работа в парах.

Решить задачи № 9, 10 (рабочая тетрадь) с последующей проверкой.

***Задача № 10***

Заполните таблицу.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $K$ | (5; –2) | (–10; 1) | (–3; 0) |
| $M$ | (3; 0) | (–2; 1) | (0; 2) |
| $\overline{KM}$ | {–2; 2} | {8; 0} | {3; 2} |
| $2\overline{KM}$ | {–4; 4} | {16; 0} | {6; 4} |
| $-0{,}5\overline{KM}$ | {1; –1} | {–4; 0} | {–1,5; –1} |

***Задача № 9***

*Дано:* Точка $A$ лежит на положительной полуоси $Ox$, а точка $B$ – на положительной полуоси $Oy$, $OA = 5$, $OB = 12$.

Найдите координаты:

а) вершин прямоугольника *OAMB*;

б) радиус-векторов точек *A*, *B* и *M*;

в) вектора $\overrightarrow{AB}$;

г) векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BC}$, если *C* – точка пересечения диагоналей прямоугольника *OAMB*.

***Решение:***

а) $O(0;\ 0)$, $A(5;\ 0)$, $M(5;\ 12)$, $B(0;\ 12)$.

б) Радиус-вектором точки *A* называется вектор, начало которого совпадает с началом координат, а его конец – точка *A*. Координаты радиус-вектора точки *A* равны соответствующим координатам точки *A*. Поэтому $\overrightarrow{OA}\{5;\ 0\}$; $\overrightarrow{OB}\{0;\ 12\}$; $\overrightarrow{OM}\{5;\ 12\}$.

в) Каждая координата вектора $\overrightarrow{AB}$ равна разности соответствующих координат его конца (точки *B*) и начала (точки *A*). Так как $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 12)$, то $\overrightarrow{AB}\{-5;\ 12\}$.

г) Точка пересечения диагоналей прямоугольника является серединой диагонали *OM*, следовательно, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$. Так как $\overrightarrow{OM}\{5;\ 12\}$, то $\overrightarrow{OC}\{2{,}5;\ 6\}$.

Каждая координата вектора $\overrightarrow{BC}$ равна разности соответствующих координат его конца (точки *C*) и начала (точки *B*). Координаты точки *C* равны соответствующим координатам ее радиус-вектора $\overrightarrow{OC}$, т. е. $C\ (2{,}5;\ 6)$, координаты точки *B* равны $(0;\ 12)$, поэтому $\overrightarrow{BC}\{2{,}5;\ -6\}$.

2. Самостоятельное решение задач.

Решите задачи № 937, 939, 940 (в, г).

(Три ученика работают у доски, остальные – в тетрадях.)

***Задача № 937***

Так как *B* – середина *AC*, то $x_B = \dfrac{x_A + x_C}{2}$; $y_B = \dfrac{y_A + y_C}{2}$.

$A(0;\ 1)$, $B(5;\ -3)$, отсюда $5 = \dfrac{0 + x_C}{2}$; $-3 = \dfrac{1 + y_C}{2} \Rightarrow x_C = 10$; $y_C = -7$, следовательно, $C(10;\ -7)$.

Так как *B* – середина *BC*, то $x_D = \dfrac{x_B + x_C}{2}$; $y_D = \dfrac{y_B + y_C}{2}$.

$B(5;\ -3)$, $C(10;\ -7)$, отсюда $x_D = \dfrac{5+10}{2} = 7{,}5$; $y_D = \dfrac{-3-7}{2} = -5$, следовательно, $D(7{,}5;\ -5)$.

*Ответ:* $C(10;\ -7)$, $D(7{,}5;\ -5)$.

***Задача № 939***

а) Расстояние от точки $M$ до оси абсцисс равно модулю ординаты точки $M$, т. е. равно 2.

б) Расстояние от точки $M$ до начала координат равно длине радиус-вектора точки $M$, т. е. $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

*Ответ:* а) 2; б) 3; в) $\sqrt{13}$.

## VII. Самостоятельное решение задач

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задачи № 929, 931, 938 (в, г, д).

*II уровень сложности:* задача № 938 (в, г, д), дополнительные задачи № 1, 2.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1***

Точка $M$ лежит на положительной полуоси $Oy$, точка $K$ – на положительной полуоси $Ox$.

а) Найдите координаты вершин трапеции $OMNK$, если $OK = 10$, $OM = \frac{1}{2}MN = 4$.

б) Вычислите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

***Решение:***

а) $OM = 4 \Rightarrow M(0; 4)$, $OK = 10 \Rightarrow K(10; 0)$, $\frac{1}{2}MN = 4 \Rightarrow MN = 8 \Rightarrow N(8; 4)$, $O(0; 0)$ (рис. 10.13).

б) Пусть $A$ – середина диагонали $ON$, тогда $x_A = \frac{x_O + x_N}{2} = 4$; $y_A = \frac{y_O + y_N}{2} = 2 \Rightarrow A(4; 2)$.

Пусть $B$ – середина $MK$, тогда $x_B = \frac{x_M + x_K}{2} = \frac{0+10}{2} = 5$; $y_B = \frac{y_M + y_K}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \Rightarrow B(5; 2)$, $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (2-2)^2} = 1$.

*Ответ:* а) $M(0; 4)$, $N(8; 4)$, $K(10; 0)$; б) 1.

***Задача 2***

*Дано:* $OA = 6$, $OB = 4$ (рис. 10.14).

*Найти:*

а) координаты точек $A$ и $B$;

б) длину медианы треугольника $OAB$, проведенной из вершины $O$;

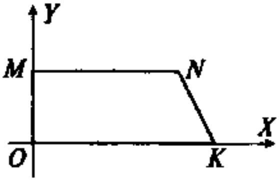



Рис. 10.13

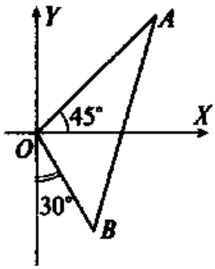



Рис. 10.14

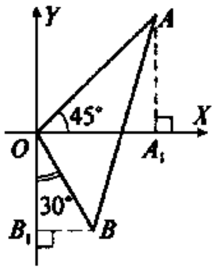



Рис. 10.15

в) длину средней линии треугольника $OAB$, параллельной стороне $OA$.

*Решение:*

а) Опустим перпендикуляр из точки $A$ на ось $Ox$ (рис. 10.15). $\Delta OAA_1$ – прямоугольный, $\angle OAA_1 = 45°$, тогда $\angle OAA_1 = 45°$, $OA_1 = AA_1$, $OA = 6$.

По теореме Пифагора $OA_1{}^2 + AA_1{}^2 = OA^2 \Rightarrow 2\ OA_1{}^2 = 36$, $OA_1 = 3\sqrt{2}$, $AA_1 = 3\sqrt{2} \Rightarrow A(3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$.

Опустим перпендикуляр из точки $B$ на ось $Oy$. $\Delta OBB_1$ – прямоугольный, $OB = 4$, $\angle BOB_1 = 30°$, тогда $BB_1 = 2$, $OB_1 = \sqrt{OB^2 - BB_1{}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow B(2;\ 2\sqrt{3})$.

б) Пусть $M$ – середина $AB$, тогда $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}+2}{2}$;

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}.$$

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}+2}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{18 + 12\sqrt{2} + 4}{4} + \frac{18 + 12\sqrt{6} + 12}{4}} = \sqrt{\frac{52 + 12(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}} =$$

$$= \sqrt{13 + 3(\sqrt{2} + \sqrt{6})}.$$

в) Пусть $N$ – середина стороны $OB$ треугольника $AOB$, тогда $x_N = \dfrac{x_B + x_O}{2} = 1$; $y_N = \dfrac{y_B + y_O}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow N(1;\ \sqrt{3})$. $MN$ – средняя линия треугольника, параллельная стороне $OA$.

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{3\sqrt{2}+2}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = 3.$$

*Ответ:* а) $A(3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$, $B(2;\ 2\sqrt{3})$; б) $\sqrt{13 + 3(\sqrt{2} + \sqrt{6})}$; в) 3.

***Задача 3***

*Дано:* $OA = 10$, $OB = 8$ (рис. 10.16).

***Найти:***

а) координаты середины отрезка $AB$;

б) периметр треугольника $MNP$, где $M$, $N$, $P$ – середины сторон треугольника $OAB$.

***Решение:***

а) $\Delta OAA_1$ – прямоугольный ($AA_1 \perp Ox$) (рис. 10.17), $\angle O = 30° \Rightarrow AA_1 = \frac{1}{2}OA = 5$, $OA_1 = \sqrt{OA^2 + AA_1^2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow A(5\sqrt{3};\ 5)$.

$\Delta OBB_1$ – прямоугольный ($BB_1 \perp Ox$), $\angle O = 30° \Rightarrow BB_1 = \frac{1}{2}OB = 4$, $OB_1 = \sqrt{OB^2 + OB_1^2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow B(4\sqrt{3};\ 4)$.

Если $C$ – середина отрезка $AB$, то $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$; $y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{9\sqrt{3}}{2};\ \frac{9}{2}\right)$.

б) Пусть $M$ – середина $AB \Rightarrow M\left(\frac{9\sqrt{3}}{2};\ \frac{9}{2}\right)$.

Пусть $N$ – середина $OA \Rightarrow N\left(\frac{0+5\sqrt{3}}{2};\ \frac{0+5}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{5\sqrt{3}}{2};\ \frac{5}{2}\right)$.

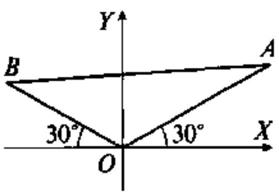



Рис. 10.16

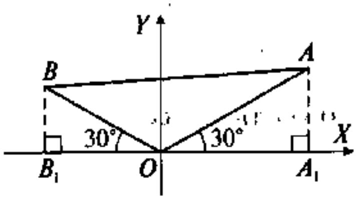



Рис. 10.17

Пусть $P$ – середина $OB \Rightarrow P\left(\frac{0+4\sqrt{3}}{2};\ \frac{0+4}{2}\right) \Rightarrow N(2\sqrt{3};\ 2)$.

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\right)^2} =$$

$= \sqrt{12 + 4} = 2.$

$$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{9}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{4} + \frac{25}{4}} = 10.$$

$$NP = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

$P_{MNP} = MN + MP + NP = 2 + 10 + 1 = 13.$

*Ответ:* а) $\left(\frac{9\sqrt{3}}{2};\ \frac{9}{2}\right)$; б) 13.

***Задача 4***

*Дано:* Точки $A(3;\ 4)$, $B(6;\ 6)$, $C(9;\ 4)$, $D(6;\ 2)$.

*Доказать:* $ABCD$ – параллелограмм.

*Доказательство:* Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Найдем координаты середин диагоналей $AC$ и $BD$.

Пусть $M$ – середина $AC$, тогда $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+9}{2} = 6$; $y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$, следовательно, $M(6;\ 4)$.

Пусть $N$ – середина $BD$, тогда $x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{6+6}{2} = 6$; $y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$, следовательно, $N(6;\ 4)$.

Точки $M$ и $N$ совпадают, следовательно, диагонали $AC$ и $BD$ имеют общую точку $M(N)$ Докажем теперь, что $AC$ и $BD$ не лежат на одной прямой, т. е. $\overrightarrow{AC} \neq k \cdot \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AC}\{6;\ 0\}$, $\overrightarrow{BD}\{0;\ -4\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \neq k \cdot \overrightarrow{BD} \Rightarrow AC$ и $BD$ не лежат на одной прямой, следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.

***Задача 5***

Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(3;\ 5)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 4)$. Определите вид треугольника. Найдите координаты центра описанной вокруг треугольника окружности и ее радиус.

*Решение:* Найдем длины сторон треугольника.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2}.$$

$BC^2 = AB^2 + AC^2\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{10}^2\right) \Rightarrow$ по теореме, обратной теореме Пифагора, $\Delta ABC$ – прямоугольный треугольник с гипотенузой $BC$, $\angle A = 90°$.

Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы.

Пусть $K$ – центр окружности, тогда $x_K = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$;

$y_K = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow K\left(\dfrac{5}{2};\ \dfrac{7}{2}\right)$.

$$R = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

*Ответ:* $K\left(\dfrac{5}{2};\ \dfrac{7}{2}\right)$; $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание (одно задание – одна буква) ставится 1 балл.

- оценка «5» – 4–5 баллов;
- оценка «4» – 3 балла;
- оценка «3» – 2 балла;
- оценка «2» – менее 2 баллов.

## VIII. Рефлексия учебной деятельности

1. Что такое радиус-вектор?
2. Чему равны координаты вектора, если известны координаты начала и конца?

3. Как найти координаты середины вектора?
4. Как вычислить длину вектора по его координатам?
5. Как найти расстояние между двумя точками?

**Домашнее задание**

1. П. 91, 92; вопросы 9–13 (учебник, с. 244).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 930, 932, 935, 936, (учебник), № 11 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 933, 935, 936 (учебник), дополнительные задачи № 3–5 (см. урок 17).

## Урок 18. Простейшие задачи в координатах

***Основная дидактическая цель урока:*** совершенствовать навыки решения задач методом координат.

### Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 11 (устно), задачи № 932. Один ученик заранее записывает решение на доске. Решение задач № 3, 4, 5 – индивидуально у нескольких учеников.)

***Задача № 11***

*Найти:* Координаты вершины $B$ параллелограмма $ABCD$, если $A(0; 0)$, $C(5; 7)$, $D(3; 0)$.

*Решение:*

1) Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, следовательно, $\overline{AB} = \overline{DC}$. Так как $C(5; 7)$, $D(3; 0)$, то $\overline{DC}\{2; 7\}$, поэтому $\overline{AB}\{2; 7\}$.

2) Так как $A(0; 0)$, $\overline{AB}\{2; 7\}$, то $B(2; 7)$.

*Ответ:* $B(2; 7)$.

***Задача № 232***

*Решение:* Так как $\Delta ABC$ – равнобедренный ($AC = BC$), то высота $CO$ является медианой $AB = 2a$, значит, $AO = BO = a$.

Точка $A$ лежит на отрицательной полуоси $Ox$, $OA = a$, следовательно, $A(-a; 0)$.

Точка $B$ лежит на положительной полуоси $Ox$, $OB = a$, следовательно, $A(a; 0)$.

Точка $C$ лежит на положительной полуоси $Oy$, $CO = h$, следовательно, $C(0; h)$.

*Ответ:* $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $C(0; h)$.

2. Решить устно задачи № 934, 938 (а, б, е), 940 (а, б).

3. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проведения устного теоретического опроса.)

**I уровень сложности**

1. *Дано:* Точки $A(2; -3)$, $B(-4; 1)$, $C(-3; -2)$.

*Найти:*

а) координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{CB}$;

б) координаты середин отрезков $AC$, $BC$;

в) расстояния между точками $A$ и $B$, $B$ и $C$.

2. *Дано:* Векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

*Найти:* а) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$.

**II уровень сложности**

1. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $A(-4; 1)$, $B(-2; 5)$, $C(6; 3)$.

*Найти:* Координаты вершины $D$ и точки пересечения диагоналей. Вычислите периметр параллелограмма.

2. *Дано:* $OA = 6$; $OB = 10$ (рис. 10.18).

*Найти:* Длины медиан треугольника $OAB$.

**III уровень сложности**

1. *Дано:* Точки $M(-2; 2)$, $N(4; -1)$, $K(1; -7)$, $P(-5; 4)$.

*Доказать:* $MNKP$ – квадрат.

2. Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(6; -4)$.

*Найти:* Радиус описанной вокруг треугольника окружности.

**III. Решение задач**

Работа в группах.

(Ученики в группах решают задачи № 947 (а), 948 (а). По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

***Задача № 947 (а)***

*Решение:* Найдем стороны треугольника $ABC$ (рис. 10.19).

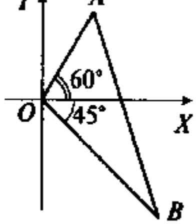



Рис. 10.18

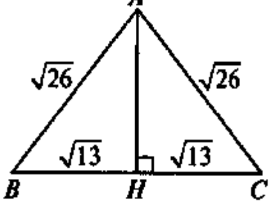



Рис. 10.19

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{26}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{52} =$$
$$= 2\sqrt{13}.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Так как $AB = AC$, то $\Delta ABC$ – равнобедренный с основанием $BC$, следовательно, высота $AH$ является его медианой, т. е. $BH = CH = \sqrt{13}$.

$\Delta ABH$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{26 - 13} = \sqrt{13}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13.$$

*Ответ:* 13.

**Вопросы для обсуждения.**

- **Какой треугольник называется равнобедренным?**
- **Можно ли найти стороны треугольника, если известны координаты его вершин?**
- **Какая формула используется для вычисления длины отрезка, если известны координаты его начала и конца?**
- **Как найти площадь равнобедренного треугольника?**
- **Какую из высот равнобедренного треугольника удобнее находить?**
- **Что вы знаете о высоте равнобедренного треугольника, проведенного к основанию?**
- **Как найти координаты точки $H$, если $H$ – середина основания $BC$?**
- **Как найти длину высоты $AH$?**

***Задача № 948 (а)***

*Решение:* Пусть точка $Y$ равноудалена от точек $A(-3;\ 5)$ и $B(6;\ 4)$, т. е. $AY = BY$.

$$AY = \sqrt{(x_Y - x_A)^2 + (y_Y - y_A)^2} = \sqrt{(0+3)^2 + (y-5)^2} =$$
$$= \sqrt{y^2 - 10y + 34}.$$

$$BY = \sqrt{(x_Y - x_B)^2 + (y_Y - y_B)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (y-4)^2} =$$
$$= \sqrt{y^2 - 8y + 52}.$$

$AY = BY \Rightarrow y^2 - 10y + 34 \Rightarrow 2y = -18 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow Y(0;\ -9)$.

*Ответ:* $(0;\ -9)$.

Вопросы для обсуждения.

– Указанная точка лежит на оси ординат. Что вы можете сказать о ее координатах?
– Точка $Y$ равноудалена от точек $A$ и $B$. Как это утверждение записать на языке математики?
– Чему равно расстояние от точки $A$ до точки $Y$?
– Чему равно расстояние от точки $B$ до точки $Y$?

**IV. Самостоятельное решение задач**

(Дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задачи № 13, 14, 15 (рабочая тетрадь), № 942, 943 (учебник).

*II уровень сложности:* задачи № 942, 943, 945, 949 (б).

***Задача № 13***

*Дано:* Точка $K$ – середина отрезка $BC$.

Заполните таблицу.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B$ | (3; –1) | (0; 5) | (8; –4) |
| $C$ | (7; 3) | (–4; –3) | (4; 0) |
| $K$ | (5; 1) | (–2; 1) | (6; –2) |

***Задача № 14***

Найдите координаты середины медианы $AM$ треугольника $ABC$, если $A(-2; 4)$, $B(2; -1)$, $C(6; 1)$.

***Решение:***

1) Отрезок $AM$ – медиана треугольника $ABC$, поэтому точка $M$ – середина стороны $BC$. По условию задачи $B(2; -1)$, $C(6; 1)$, следовательно, $M(4; 0)$.

2) Пусть точка $K$ – середина отрезка $AM$. Так как $A(-2; 4)$, $M(4; 0)$, то $K(1; 2)$.

*Ответ:* (1; 2).

***Задача № 15***

Найдите длины векторов $\vec{a}\{-3; 4\}$; $\vec{b}\{5; 0\}$; $\vec{c}\{0; -2\}$.

*Решение:* $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$; $|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$.

$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

*Ответ:* $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 5$; $|\vec{c}| = 2$.

***Задача № 942***

*Решение:* Так как $AM$ – медиана треугольника $ABC$, то $M$ – середина $BC$, тогда $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$; $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1$, поэтому $M(3; -1)$.

$$AM = \sqrt{(x_M + x_A)^2 + (y_M + y_A)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-1)^2} =$$
$$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

*Ответ:* $AM = \sqrt{13}$.

***Задача № 943***

***Решение:*** Так как точка $B$ лежит на положительной полуоси $Ox$ и $OB = b$, то $B(b; 0)$ (рис. 10.20).

Так как точка $A$ лежит на отрицательной полуоси $Ox$, $OA = a$, то $A(-a; 0)$.

Так как точка $C$ лежит на положительной полуоси $Oy$, $OC = h$, то $C\ (0; h)$.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0+a)^2 + (h-0)^2} = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0-b)^2 + (h-0)^2} = \sqrt{b^2 + h^2}.$$

*Ответ:* $AC = \sqrt{a^2 + h^2}$; $BC = \sqrt{b^2 + h^2}$.

***Задача № 945***

***Решение:*** Найдем координаты вершин трапеции $O(0; 0)$, $B(b; c)$ (рис. 10.21). Точка $A$ лежит на положительной полуоси $Ox$, поэтому $A(a; 0)$. $B_1B = b$, $B_1C = B_1B + BC = b + d$. Расстояние от точки $C$ до оси $Ox$ равно $c$, поэтому $C\ (b + d; c)$.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(b+d-a)^2 + (c-0)^2} =$$
$$= \sqrt{(b+d-a)^2 + c^2}.$$

$$OC = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} = \sqrt{(b+d)^2 + c^2}.$$

*Ответ:* $AC = \sqrt{(b+d-a)^2 + c^2}$; $OC = \sqrt{(b+d)^2 + c^2}$.

***Задача № 949 (б)***

***Решение:*** Пусть точка $X$ — точка на оси абсцисс, равноудаленная от точек $A(1; 2)$ и $B(-3; 4)$, тогда $X(x; 0)$ и $AX = BX$, т. е.:
$$AX = \sqrt{(x_X - x_A)^2 + (y_X - y_A)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 5},$$

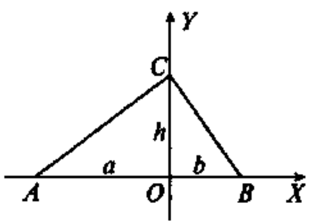


Рис. 10.20

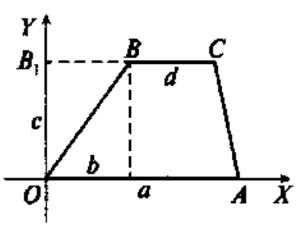


Рис. 10.21

$$BX = \sqrt{(x_X - x_B)^2 + (y_X - y_B)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 25},$$

тогда $x^2 - 2x + 5 = x^2 + 6x + 25$, откуда $x = -2{,}5$, т. е. $X(-2{,}5; 0)$.

*Ответ:* $(-2{,}5; 0)$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три или четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

### V. Рефлексия учебной деятельности

1. Чему равны координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
2. Как найти координаты середины вектора?
3. Как вычислить длину вектора по его координатам?
4. Как найти расстояние между двумя точками?

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 944, 949 (а) (учебник), № 16, 17 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 944, 948 (б), 947 (б), 948 (б), 949 (б).

## Урок 19. Решение задач методом координат

***Основная дидактическая цель урока:*** совершенствовать навыки решения задач методом координат.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 944. Один ученик заранее записывает решение на доске. Решение задач № 16, 17 – индивидуально у нескольких учеников.)

***Задача № 944***

*Решение:*

а) Так как вершина $A$ лежит на положительной полуоси $Ox$, $OA = a$, то $A(a; 0)$ (рис. 10.22). Вершина $B$ имеет координаты $(b; c)$, $OA = BC = a$, поэтому $C(b + a; c)$.

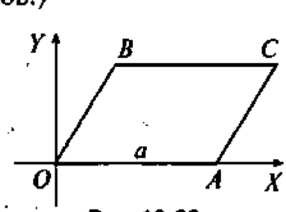


Рис. 10.22

*Ответ:* $C(b + a; c)$.

Вопросы для обсуждения.

– Чему равны координаты точки $A$, если известно, что она лежит на положительной полуоси $Ox$ и $OA = a$?

– Как найти координаты вершины $C$, если $B(b; c)$, $A(a; 0)$?

б) Так как $A(a; 0)$, $C(b + a; c)$, то:

$$AC = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(b + a - a)^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

$$CO = \sqrt{\left(x_C - x_O\right)^2 + \left(y_C - y_O\right)^2} = \sqrt{(b + a - 0)^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}.$$

Вопросы для обсуждения.

– Как найти длину отрезка $AC$, если известны координаты точек $A$ и $C$?

– Как найти длину отрезка $CO$, если $O(0; 0)$, $C(b + a; c)$?

***Задача № 16***

Найдите длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AM}$, если $A(5; -3)$, $B$ (2; 1), $M(5; 3)$.

*Решение:*

а) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(2-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25} = 5.$

б) $\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{(5-5)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{36} = 6.$

*Ответ:* $\left|\overline{AB}\right| = 5$; $\left|\overline{AM}\right| = 6$.

***Задача № 17***

Найдите длины сторон $AB$ и $BC$ и длину $BK$ треугольника $ABC$, если $A(-2; 4)$, $B(10; -1)$, $C(6; -4)$.

*Решение:*

а) $AB = \sqrt{(10+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{169} = 13.$

б) $BC = \sqrt{(6-10)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{25} = 5.$

в) Так как отрезок $BK$ – медиана треугольника $ABC$, то точка $K$ является серединой стороны $AC$, следовательно, $K(2; 0)$. Поэтому $BK = \sqrt{(2-10)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{65}.$

*Ответ:* $AB = 13$; $BC = 5$; $BK = \sqrt{65}$.

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

1) В треугольнике $OAB$ проведена медиана $OM$. Определите координаты точки $M$ и ее длину, если точки $A$ и $B$ имеют координаты $A(-5; 0)$, $B(0; -3)$, а точка $O$ является началом координат.

2) Дан треугольник $ABC$. Вычислите периметр треугольника, образованного его средними линиями, если $A(7; -4)$, $B(-4; 3)$ и $C(-5; 0)$.

**II уровень сложности**

1) В окружности с центром $M$ проведен диаметр $KP$. Определите координаты центра окружности и ее радиус, если $A(-6; -1)$, $B(2; 5)$.

2) Даны точки $A(-1; -3)$, $B(-4; 3)$, $C(5; 0)$. Вычислите длину медианы $BM$ и длину биссектрисы $AK$.

**III уровень сложности**

1) На диаметре $AB$ окружности с центром в точке $O(2; -5)$ отмечена точка $C(-1; -3)$ так, что она является серединой радиуса $OA$. Найдите координаты концов диаметра $AB$ и его длину.

2) Вершина $C$ трапеции $OABC$ лежит на положительной полуоси $Ox$, $OC = 10$, $AB = 6$, вершины $A$ и $B$ расположены в четвертой координатной четверти. Определите координаты точек $M$ и $N$, если известно, что $MN$ – средняя линия трапеции.

3. Выполнение теоретического теста с последуюшей взаимопроверкой.

***Вариант 1***

1) Если $A(c; d)$, $B(m; n)$, $C(x; y)$ – середина отрезка $AB$, то:

а) $x = \dfrac{c+m}{2}$, $y = \dfrac{d+n}{2}$;

б) $x = \dfrac{c-m}{2}$, $y = \dfrac{d-n}{2}$;

в) $x = \dfrac{m-c}{2}$, $y = \dfrac{n-d}{2}$.

2) Если $\vec{a}\{x; y\}$, $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ $(k \neq 0)$, то:

а) $\vec{c}\left\{\dfrac{x}{k}; \dfrac{y}{k}\right\}$;

б) $\vec{c}\{k \cdot x; k \cdot y\}$;

в) $\vec{c}\{k + x; k + y\}$.

3) Если $\vec{d}\{m; n\}$, то:

а) $|\vec{d}| = \sqrt{m^2 - n^2}$;

б) $|\vec{d}| = \sqrt{m^2 + n^2}$;

в) $|\vec{d}| = \sqrt{(m-n)^2}$.

4) Если $\vec{a}\{a;\ b\}$, $\vec{c}\{c;\ d\}$, $\vec{c}\{a-c;\ b-d\}$, то:

а) $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$; б) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; в) $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

5) Если $\overline{CD}| = \sqrt{(a-b)^2-(c-d)^2}$, то:

а) $C(b;\ d)$, $D(a;\ c)$;
б) $C(a;\ b)$, $D(c;\ d)$;
в) $C(c;\ d)$, $D(a;\ b)$.

6) Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$, то:

а) $\vec{a}=-2\vec{b}$; б) $\vec{a}=2\vec{b}$; в) $\vec{b}=2\vec{a}$.

7) Если $\overline{MN}\{a-b;\ c-d\}$, то:
а) $M(a;\ c)$, $N(b;\ d)$;
б) $M(a;\ b)$, $N(c;\ d)$;
в) $M(b;\ d)$, $N(a;\ c)$.

***Вариант 2***

1) Если $A(a;\ b)$, $B(c;\ d)$, то:

а) $\overrightarrow{AB}\{a-c;\ b-d\}$;

б) $\overrightarrow{AB}\{c-a;\ d-b\}$;

в) $\overrightarrow{AB}\{a+c;\ b+d\}$.

2) Если $\vec{a}\{m;\ n\}$, $\vec{c}\{p;\ k\}$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, то:

а) $\vec{c}\{m\cdot p;\ n\cdot k\}$;

б) $\vec{c}\{m+n;\ p+k\}$;

в) $\vec{c}\{m+p;\ n+k\}$.

3) Если $A(e;\ c)$, $B(m;\ n)$, то:

а) $|\overline{BA}| = \sqrt{(e-m)^2+(c-n)^2}$;

б) $|\overline{BA}| = \sqrt{(m-e)^2+(n-c)^2}$;

в) $|\overline{BA}| = \sqrt{(e-c)^2+(m-n)^2}$.

4) Если $A(e;\ p)$, $B(m;\ n)$, $C\left(\dfrac{m+e}{2};\ \dfrac{n+p}{2}\right)$, то:

а) $C$ – середина $AB$;
б) $A$ – середина $BC$;
в) $B$ – середина $AC$.

5) Если $|\vec{x}| = \sqrt{a^2+b^2}$, то:

а) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{x}\{a^2;\ b^2\}$; в) $\vec{x}\{b;\ a\}$.

6) Если $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, $|\vec{n}| = \frac{1}{3}|\vec{m}|$, то:

а) $\vec{n} = \frac{1}{3}\vec{m}$; б) $\vec{m} = -3\vec{n}$; в) $\vec{m} = 3\vec{n}$.

7) Если $\vec{x}\{a; b\}$, $\vec{y}\{k \cdot a; k \cdot b\}$ $(k \neq 0)$, то:

а) $\vec{y} = k \cdot \vec{x}$; б) $\vec{x} = k \cdot \vec{y}$; в) $\vec{x} \cdot \vec{y} = k$.

*Ответы к тесту:*

***Вариант 1:*** 1 – а; 2 – б; 3 – б; 4 – в; 5 – а; 6 – б; 7 – в.

***Вариант 2:*** 1 – б; 2 – в; 3 – а; 4 – а; 5 – в; 6 – б; 7 – а.

**III. Определение темы урока**

1. Работа в парах.

Решить задачи № 951 (а), 954 с последующим обсуждением.

***Задача № 951 (а)***

Четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник, если $ABCD$ – параллелограмм, в котором диагонали равны.

Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм, т. е. его диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Пусть $O$ – середина отрезка $AC$, $Q$ – середина $BD$, тогда:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1;\ y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2;$$

$$x_Q = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-3}{2} = -1;\ y_Q = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Следовательно, точки $O(-1; -2)$ и $Q(-1; -2)$ совпадают, т. е. $AC$ и $BD$ имеют общую точку $O$ $(Q)$.

Докажем, что $AC$ и $BD$ не лежат на одной прямой, т. е. $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не коллинеарны и их координаты не пропорциональны. $\overrightarrow{AC}\{4;-2\}$, следовательно, $\overrightarrow{AC} \neq k \cdot \overrightarrow{BD}$.

Докажем, что диагонали $ABCD$ равны:

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1+3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-3+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

следовательно, $ABCD$ – прямоугольник.

Вопросы для обсуждения.

– Сформулируйте признак прямоугольника. (*Какой четырехугольник является прямоугольником?*)
– Как доказать, что $ABCD$ – параллелограмм? Достаточно ли будет того, что диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам?
– Возможно ли, что точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат на одной прямой?

– Как доказать, что точки $A$, $B$, $C$, $D$ не лежат на одной прямой?
– Как доказать, что параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником? Как найти диагонали $AC$ и $BD$?

***Задача № 954***

*Решение:* Поместим данный равнобедренный треугольник в прямоугольную систему координат таким образом, чтобы медиана лежала на положительной полуоси $Oy$, а его основание – на оси $Ox$ (рис. 10.23).

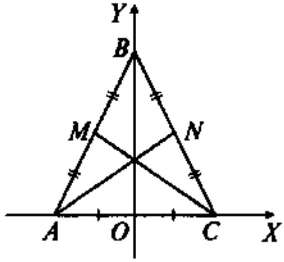


**Рис. 10.23**

Так как медиана равна 160 см, а основание – 80 см, то $A(-40; 0)$, $B(0; 160)$, $C(40; 0)$.

Пусть $M$ и $N$ – середины сторон $AB$ и $BC$ соответственно, тогда $x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = 20$; $y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = 80$, следовательно, $M(-20; 80)$, $N(20; 80)$.

$AN$ и $CM$ – медианы. Найдем их длины.

$$AN = \sqrt{(x_N - x_A)^2 + (y_N - y_A)^2} = \sqrt{(20+40)^2 + (80-0)^2} =$$
$$= \sqrt{3600 + 6400} = 100 \text{ см.}$$

$$CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(-20-40)^2 + (80-0)^2} =$$
$$= \sqrt{3600 + 6400} = 100 \text{ см.}$$

*Ответ:* 100 см; 100 см.

Вопросы для обсуждения.

– Как расположить треугольник в прямоугольной системе координат, чтобы по данным задачи можно было определять координаты вершин треугольника?
– Чему равны координаты вершин $A$, $B$, $C$ треугольника $ABC$?
– Что вы можете сказать о медианах равнобедренного треугольника, проведенных к его боковым сторонам?
– Как найти координаты точки $N$, если известно, что $AN$ – медиана $\Delta ABC$?
– Чему равны координаты точки $N$?
– Чему равна длина медианы $AN$?
– Чему равна длина медианы $CM$?

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

2. Самостоятельное решение задач.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задача № 950 (а).

*II уровень сложности:* задача № 955.

***Задача № 950 (а)***

*Решение:* Четырехугольник $MNPQ$ – параллелограмм, если его диагонали $MP$ и $NQ$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Найдем координаты середины диагонали $MP$ – точки $A$:

$x_A = \frac{x_M + x_P}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$; $y_A = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$, следовательно, $A\left(4; \frac{5}{2}\right)$.

Найдем координаты середины диагонали $NQ$ – точки $B$:

$x_B = \frac{x_N + x_Q}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$; $y_B = \frac{y_N + y_Q}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$, следовательно, $B\left(4; \frac{5}{2}\right)$.

Середины диагоналей совпадают, значит, диагонали пересекаются в точке $A$ ($B$) и делятся ею пополам, т. е. $MP$ и $NQ$ имеют общую точку.

Докажем, что $MP$ и $NQ$ не лежат на одной прямой, т. е. $\overline{MP} \neq k \cdot \overline{NQ}$, $\overline{MP}\{6; 3\}$, $\overline{NQ}\{-4; 3\} \Rightarrow \overline{MP} \neq k \cdot \overline{NQ}$.

Найдем диагонали $MP$ и $NQ$:

$$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$NQ = \sqrt{(x_Q - x_N)^2 + (y_Q - y_N)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

*Ответ:* $MP = 3\sqrt{5}$; $NQ = 5$.

***Задача № 955***

*Решение:* Поместим треугольник $ABC$ в прямоугольную систему координат так, чтобы высота $BO$, равная 10 см, лежала на положительной полуоси $Oy$ (рис. 10.24). Сторона $AC$, которая делится высотой $BO$ на отрезки $AO$ и $CO$, равные соответственно 10 см и 4 см, лежала на оси $Ox$. Тогда $A(-10; 0)$, $B(0; 10)$, $C(4; 0)$, $O(0; 0)$.

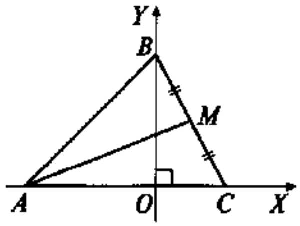


**Рис. 10.24**

Из двух оставшихся сторон ($AB$ и $CB$) меньшей будет $CB$, так как $OC < AO$. Пусть $M$ – середина стороны $CB$, тогда $AM$ – медиана.

$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 2$; $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 5$, следовательно, $M(2; 5)$.

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(2+10)^2 + (5-0)^2} =$$
$$= \sqrt{169} = 13 \text{ см.}$$

*Ответ:* 13 см.

### IV. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

**I уровень сложности**

***Задача № 947 (б)***

*Указание.* Докажите, что две стороны $\Delta ABC$ равны. Опустите высоту к основанию $\Delta ABC$ и найдите ее длину. Основание высоты – середина основания $\Delta ABC$.

***Задача № 948 (б)***

*Указание.* Пусть $A(0;\ y)$ – точка, равноудаленная от $C$ и $D$, тогда $CA = DA$, т. е.

$$\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}.$$

***Задача № 12***

*Дано*: Точки с координатами $A(2;\ -1)$, $B(5;\ -3)$, $C(-2;\ 11)$, $D(-5;\ 13)$.

Докажите, что эти точки являются вершинами параллелограмма.

*Доказательство:* Воспользуемся признаком параллелограмма. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом. В силу этого признака достаточно показать, что: а) $\overline{AB} = \overline{DC}$; б) точки $A$, $B$ и $D$ не лежат на одной прямой.

а) Так как $A(2;\ -1)$, $B(5;\ -3)$, то $\overline{AB}\{3;\ -2\}$. Так как $C(-2;\ 11)$, $D(-5;\ 13)$, то $\overline{DC}\{3;\ -2\}$. Итак, $\overline{AB} = \overline{DC}$.

б) Точки $A$, $B$ и $D$ лежат на одной прямой, если координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ пропорциональны. Так как $\overline{AB}\{3;\ -2\}$ и $\overline{AB}\{-7;\ 14\}$, то координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ не пропорциональны. Поэтому эти векторы не коллинеарны и, следовательно, точки $A$, $B$ и $D$ не лежат на одной прямой. Итак, четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек $A(-2;\ 6)$ и $B(7;\ 3)$.

2. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(9; -1)$, $D(7; 5)$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм. Найдите его диагонали.

3. В треугольнике $MNK$ проведена высота $NO$, $\angle NMO = 45°$, $NO = 6$, $OK = 4$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины $M$.

***Вариант 2***

1. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек $M(-3; 8)$ и $N(6; 5)$.

2. Четырехугольник $MNKP$ задан координатами своих вершин $M(-6; 1)$, $N(2; 5)$, $K(4; -1)$, $P(-4; -5)$. Докажите, что $MNKP$ – параллелограмм. Найдите его диагонали.

3. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 45°$, высота $BO$ делит сторону $AC$ на отрезки $AO = 4$ и $CO = 8$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины $C$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. В параллелограмме $ABCD$ $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$, $D(6; -1)$. Найдите координаты середины отрезка $CO$, если $O$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

2. Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин $A(2; 2\sqrt{3})$, $B(0; 0)$, $C(3; \sqrt{3})$. Найдите углы треугольника.

3. В треугольнике $MNK$ $MN = 4$, $MK = 6$, $\angle M = 60°$. Найдите медианы треугольника.

***Вариант 2***

1. В параллелограмме $ABCD$ $A(-4; -2)$, $B(2; 6)$, $D(4; 8)$. Найдите координаты середины отрезка $DO$, если $O$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

2. Треугольник $MNK$ задан координатами своих вершин $M(4; 1)$, $N(7; 3)$, $K(2; 4)$. Найдите углы треугольника.

3. В треугольнике $ABC$ $AB = 8\sqrt{2}$, $AC = 18$, $\angle A = 45°$. Найдите медианы треугольника.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

## V. Рефлексия учебной деятельности

Самостоятельная работа над ошибками: по указаниям к решению задач (I уровень сложности); по готовым ответам (II и III уровни сложности).

***Ответы к задачам самостоятельной работы:***

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. (1; 0).
2. $AC = 2\sqrt{17}$; $BD = 2\sqrt{29}$.
3. $\sqrt{73}$.

***Вариант 2***

1. (0; 2).
2. $MK = 2\sqrt{26}$; $NP = 2\sqrt{34}$.
3. $2\sqrt{26}$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $\left(7;\ \frac{5}{2}\right)$.
2. $\angle A = 60°$; $\angle B = 30°$; $\angle C = 90°$.
3. $\sqrt{19}$; $2\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$.

***Вариант 2***

1. $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$.
2. $\angle A = 90°$; $\angle B = \angle C = 45°$.
3. $9\sqrt{65}$; $2\sqrt{53}$; $\sqrt{185}$.

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 946, 950 (б), 951 (б) (учебник), № 18 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 952, 953 (устно), № 946, 951 (б) (учебник), № 18 (рабочая тетрадь).

## Урок 20. Уравнение окружности

***Основные дидактические цели урока:*** вывести уравнение окружности; показать применение уравнения окружности при решении задач; совершенствовать навыки решения задач методом координат.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задач № 18 (устно) и задачи № 946 (б). Один ученик заранее записывает решение на доске.)

***Задача № 18***

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, и найдите его площадь, если $A(-3; 4)$, $B(7; 9)$, $C(5; -2)$, $D(-5; -7)$.

*Решение:*

а) Четырехугольник является ромбом, если все его стороны равны. Действительно, если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник является параллелограммом. А параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом.

Сравним длины сторон данного четырехугольника:

$AB^2 = (7 + 3)^2 + (9 - 4)^2 = 100 + 25 = 125;$

$BC^2 = (5 - 7)^2 + (-2 - 9)^2 = 4 + 121 = 125;$

$CD^2 = (-5 - 5)^2 + (-7 + 2)^2 = 100 + 25 = 125;$

$DA^2 = (-5 + 3)^2 + (-7 - 4)^2 = 4 + 121 = 125.$

Следовательно, $AB^2 = BC^2 = CD^2 = DA^2$ и $AB = BC = CD = DA$.

б) Итак, четырехугольник $ABCD$ является ромбом, поэтому его площадь равна половине произведения его диагоналей:

$AC^2 = (-3 - 5)^2 + (-2 - 4)^2 = 100$, следовательно, $AC = 10$;

$BD^2 = (-5 - 7)^2 + (-7 - 9)^2 = 400$, следовательно, $BD = 20$.

$S_{ABCD} = 0{,}5 \cdot BD = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 20 = 100.$

*Ответ:* 100.

***Задача № 946 (б)***

*Дано:* $M_1(-1; x)$; $M_2(2x; 3)$; $M_1M_2 = 7$.

***Найти:*** $x$.

***Решение:***

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_{M_2} - x_{M_1})^2 + (y_{M_2} - y_{M_1})^2} = \sqrt{(2x+1)^2 + (3-x)^2} = 7,$$

следовательно, $(2x + 1)^2 + (3 - x)^2 = 49$.

$4x^2 + 4x + 1 + 9 - 6x + x^2 = 49$; $5x^2 - 2x - 39 = 0$.

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-39) = 784.$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 28}{2 \cdot 5}.$$

$x_1 = 3$, $x_2 = -2{,}6$.

*Ответ:* $x = 3$ или $x = -2{,}6$.

Наводящие вопросы.

– Как найти расстояние между точками $M_1$ и $M_2$, если известны их координаты?

– Каким образом можно найти значение $x$, зная, что $M_1M_2 = 7$?

## III. Актуализация знаний учащихся

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

Самостоятельное решение задач.

*I уровень сложности:* математический диктант с последующей самопроверкой.

*II уровень сложности:* решение задач с самопроверкой по готовым решениям.

***Вариант 1***

1. Найдите координаты центра окружности, если $AB$ – диаметр, $A(2; -4)$, $B(-6; 8)$.

2. Вычислите радиус окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $M(12; -5)$.

3. Как называется геометрическая фигура, состоящая из множества всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки?

4. Как называется хорда, проходящая через центр окружности?

5. Расстояние от центра окружности до точки $A$ равно $d$, а радиус окружности равен $r$. Сравните $d$ и $r$, если точка $A$ лежит вне круга, ограниченного данной окружностью.

6. Пересекаются ли окружности с центрами $A$ и $B$, если $AB = 10$ см, а радиусы окружностей равны 5 см и 6 см?

7. Найдите координаты точек пересечения окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 7, с осями координат.

***Вариант 2***

1. Найдите координаты центра окружности, если $CD$ – диаметр, $C(4; 5)$, $D(-6; 7)$.

2. Вычислите радиус окружности с центром в точке $N(-6; -8)$, проходящей через начало координат.

3. Как называется геометрическая фигура, состоящая из множества всех точек плоскости, находящихся от данной точки на расстоянии, не превышающем данного?

4. Как называется отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности?

5. Расстояние от центра окружности до точки $B$ равно $m$, а радиус окружности равен $r$. Сравните $m$ и $r$, если точка $B$ лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью.

6. Пересекаются ли окружности с центрами $C$ и $D$, если $CD = 12$ см, а радиусы окружностей равны 4 см и 7 см?

7. Найдите координаты точек пересечения окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 6, с осями координат.

*Ответы к заданиям математического диктанта:*

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. $(-2; 2)$. | 1. $(-1; 6)$. |
| 2. 13. | 2. 10. |
| 3. Окружность. | 3. Круг. |
| 4. Диаметр. | 4. Радиус. |
| 5. $d > r$. | 5. $m > r$. |
| 6. Да. | 6. Нет. |
| 7. $(0; 7)$, $(-7; 0)$, $(0; -7)$, $(7; 0)$. | 7. $(6; 0)$, $(0; 6)$, $(-6; 0)$, $(0; -6)$. |

**II уровень сложности**

***Задача 1.*** Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 14 см. Найдите длины отрезков, соединяющих середины оснований с серединами боковых сторон трапеции, если высота трапеции равна 8 см.

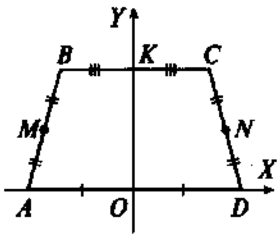


Рис. 10.25

*Решение:* Поместим трапецию $ABCD$ в прямоугольную систему координат так, чтобы середины оснований трапеции лежали на положительной полуоси $Oy$ (рис. 10.25). Так как $BC = 10$, $AD = 14$, $OK = 8$, то $A(-7; 0)$, $B(-5; 8)$, $C(5; 8)$, $D(7; 0)$, $O(0; 0)$, $K(0; 8)$.

Пусть $M$ и $N$ – середины боковых сторон $AB$ и $CD$ соответственно, тогда $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -6$; $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 4$.

$x_N = \dfrac{x_C + x_D}{2} = 6$; $y_N = \dfrac{y_C + y_D}{2} = 4$, следовательно, $M(-6; 4)$, $N(6; 4)$.

$MK = KN = \sqrt{(6-0)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$.

$MO = NO = \sqrt{(0-6)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{13}$.

*Ответ:* $2\sqrt{13}$ см; $2\sqrt{13}$ см; $2\sqrt{13}$ см; $2\sqrt{13}$ см.

***Задача 2.*** Используя метод координат, найдите пару чисел $x$ и $y$, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}.$$

*Решение:* Используя формулы расстояния между двумя точками, можно предположить, что $A(x; y)$, $B(0; 2)$, $C(0; 0)$, $D(4; 2)$ (рис. 10.26). Тогда по условию задачи $BA = CA = DA$.

Точка $A$ равноудалена от точек $B$, $C$, $D$, $\Delta BCD$ – прямоугольный, следовательно, $A$ – середина гипотенузы $CD$. Отсюда $x = \dfrac{x_C + x_D}{2} = 2$; $y = \dfrac{y_C + y_D}{2} = 1$.

*Ответ:* $x = 2$; $y = 1$.

***Задача 3.*** В прямоугольнике $ABCD$ точка $K$ делит диагональ $BD$ в отношении $2 : 1$, считая от вершины $B$. Точка $E$ – середина стороны $CD$. Используя метод координат, докажите, что точка $K$ принадлежит отрезку $AE$ и делит его в отношении $1 : 2$.

*Доказательство:* Поместим прямоугольник $ABCD$ в прямоугольную систему координат (рис. 10.27). Пусть $D(d; 0)$, $B(0; b)$. Точка $K$ делит отрезок $BD$ в отношении $2 : 1$, т. е. $BK : KD = 2 : 1$.

Тогда по теореме Фалеса $AK_1 : K_1D = 2 : 1$, $BK_2 : K_2A = 2 : 1$, т. е. $AK_1 = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{2}{3}d$, $AK_2 = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{1}{3}b$, следовательно, $K\left(\dfrac{2}{3}d; \dfrac{1}{3}d\right)$.

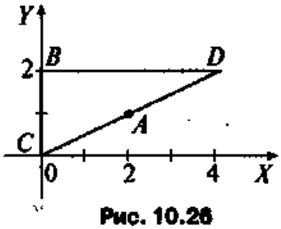



**Рис. 10.26**

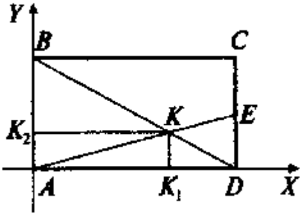



**Рис. 10.27**

Докажем, что точки $A$, $K$, $E$ лежат на одной прямой, т. е. векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AE}$ коллинеарны, значит, их коэффициенты пропорциональны.

$$\overrightarrow{AK}\left\{\frac{2}{3}d;\ \frac{1}{3}b\right\},\ \overrightarrow{AE}\left\{d;\ \frac{b}{2}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AK} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AE}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{AK}\right| \Rightarrow$$

$AE = \dfrac{3}{2}AK \Rightarrow AK = 2KE \Rightarrow AK : KE = 2 : 1,\ KE : KA = 1 : 2$, что и требовалось доказать.

**III. Определение темы урока**

Работа в парах.

Решить задачи № 1, 2 с последующим обсуждением.

***Задача 1***

Принадлежит ли точка $A$ уравнению линии $y = f(x)$, если известно, что:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$; $A(2;\ 6)$;

б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x-3}{2}}$; $A(1;\ -1)$;

в) $f(x) = \left|\dfrac{3x+5}{x-4}\right|$; $A(-1;\ 0{,}4)$?

***Задача 2***

*Дано:* $A(x_0;\ y_0)$ — центр окружности, $B(x;\ y)$ — произвольная точка окружности (рис. 10.28).

*Найти:* Радиус данной окружности.

*Ответ:* $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

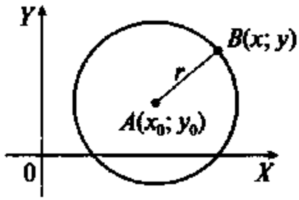



**Рис. 10.28**

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

**IV. Изучение нового материала**

1. Уравнение линии на плоскости (П. 93 учебника).

а) Если точка лежит на данной линии, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой линии.

б) Координаты любой точки, не лежащей на данной линии, не удовлетворяют ее уравнению.

(В ходе изложения нового материала учитель записывает краткий план-конспект на доске, ученики – в тетрадях.)

2. Работа в группах.

(Учитель делит класс на две группы. Каждая группа получает задание. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

***Задание 1.*** Удовлетворяют ли координаты любой точки окружности уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$? Почему?

***Задание 2.*** Можно ли утверждать, что уравнение окружности имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, где $(x_0; y_0)$ – центр окружности, $(x; y)$ – произвольная точка окружности, $r$ – радиус окружности?

***Задание 3.*** Составьте уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$.

*Ответ:* $x^2 + y^2 = r^2$, где $r$ – радиус окружности.

**V. Закрепление изученного материала**

1. Самостоятельное решение задач (устно).

Решить задачу № 22 (рабочая тетрадь).

***Задача № 22***

Постройте окружность, заданную уравнением:

а) $x^2 + y^2 = 16$;

б) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$;

в) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$.

*Решение:* Для построения окружности необходимо знать ее радиус и координаты ее центра. Если уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, то ее радиус равен $r$, а центром является точка с координатами $(a; b)$.

а) Уравнение $x^2 + y^2 = 16$ запишем в виде $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$. Отсюда следует, что центр окружности – точка $(0; 0)$, а радиус равен 4. Построим искомую окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 16$ (рис. 10.29).

б) Уравнение $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ представим в виде $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$. Следовательно, центр окружности – точка $(1; 0)$, а радиус равен 2. Построим искомую окружность, заданную уравнением $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ (рис. 10.30).

в) Чтобы выделить квадрат двучлена с переменной $x$ и квадрат двучлена с переменной $y$, прибавим к обеим частям уравнения $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$ слагаемые 1 и 4.

Получим уравнение $(x^2 + 2x + 1)^2 + (y^2 - 4y + 4)^2 = 4 + 1 + 4$, которое запишем в виде $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Значит, центр

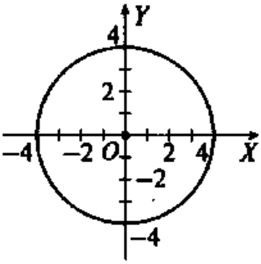



Рис. 10.29

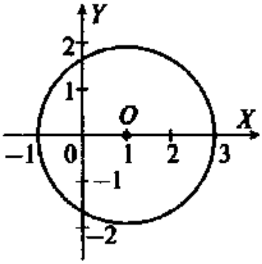



Рис. 10.30

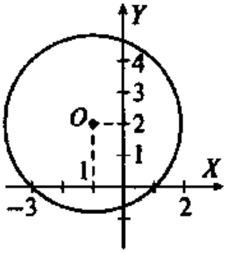



Рис. 10.31

окружности – точка $(-1; 2)$, а радиус равен 3. Построим искомую окружность, заданную уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$ (рис. 10.31).

2. Работа в парах.

Решить задачу № 961 с последующим обсуждением.

***Задача № 961***

*Решение:* Так как окружность задана уравнением $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$, то координаты точек $A$, $B$, $C$, $D$ можно подставить в уравнение окружности и таким образом определить взаимное расположение точки и окружности.

$A(-2; 4)$, следовательно, $(-2 + 5)^2 + (4 - 1)^2 = 9 + 9 = 16$, отсюда точка $A$ лежит вне круга, ограниченного данной окружностью.

$B(-5; -3)$, следовательно, $(-5 + 5)^2 + (-3 - 1)^2 = 16$, отсюда точка $B$ лежит на окружности.

$C(-7; -2)$, следовательно, $(-7 + 5)^2 + (-2 - 1)^2 = 4 + 9 = 13 < 16$, отсюда точка $C$ лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью.

$D(1; 5)$, следовательно, $(1 + 5)^2 + (5 - 1)^2 = 36 + 16 = 52 > 16$, отсюда точка $D$ лежит вне круга, ограниченного данной окружностью.

*Ответ:* а) $C$; б) $B$; в) $A$, $D$.

## VI. Самостоятельное решение задач

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задачи № 959 (в, д), 964 (б), 966 (а, в).

*II уровень сложности:* задачи № 964 (б), 966 (а, в), дополнительные задачи № 1, 2.

***Задача № 964 (б)***

*Решение:* Пусть точка $A(x; 5)$ лежит на окружности, заданной уравнением $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25 \Rightarrow (x - 3)^2 = 25 \Rightarrow x - 3 = \pm 5 \Rightarrow x = 8$; $x = -2 \Rightarrow A_1(8; 5)$, $A_2(-2; 5)$.

*Ответ:* $(8; 5)$ и $(-2; 5)$.

***Задача № 966 (а, в)***

*Решение:* Уравнение окружности имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

а) Если $A(0;\ 5)$ – центр окружности, а радиус $r = 3$, то $(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 9$ – уравнение данной окружности.

в) Если $A(-3;\ -7)$ – центр окружности, а радиус $r = \frac{1}{2}$, то $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = \frac{1}{4}$ – уравнение данной окружности.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** Окружность задана уравнением $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$. Является ли $AB$ хордой этой окружности, если $A(7;\ 3)$, $B(-1;\ -1)$? Является ли $AB$ диаметром этой окружности?

*Решение:* Если точки $A$ и $B$ лежат на заданной окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению окружности, а это значит, что отрезок $AB$ является хордой этой окружности.

$A(7;\ 3) \Rightarrow (7 - 4)^2 + (3 + 1)^2 = 25$.

$B(-1;\ -1) \Rightarrow (-1 - 4)^2 + (-1 + 1)^2 = 25 \Rightarrow AB$ – хорда.

Хорда $AB$ является диаметром данной окружности, если середина отрезка $AB$ совпадает с центром окружности.

Пусть точка $C$ – середина отрезка $AB$, тогда $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 3$; $y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \Rightarrow C(3;\ 1)$.

Окружность, заданная уравнением $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$, имеет своим центром точку $D(4;\ -1)$, не совпадающую с точкой $C$, следовательно, отрезок $AB$ не является диаметром данной окружности.

***Задача 2.*** Каково взаимное расположение окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ с линией $x^2 - 6x + y^2 + 10y - 15 = 0$?

*Решение:*

$x^2 - 6x + y^2 + 10y - 15 = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) - 9 - 25 - 15 = (x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 49 = 0$.

$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$ – это уравнение окружности с центром в точке $A(3;\ 5)$ и радиусом $r_1 = 7$.

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ – это уравнение окружности с центром в точке $B(3;\ -2)$ и радиусом $r_2 = 2$.

$AB = \sqrt{(3 - 3)^2 + (-2 + 5)^2} = 3$, $r_1 + r_2 = 7 + 2 = 9$.

$r_1 - r_2 = 7 - 2 = 5$, следовательно, вторая окружность лежит внутри первой.

***Задача 3.*** В прямоугольной системе координат треугольник $MNK$ задан координатами своих вершин: $M(-3; 0)$, $N(1; 3)$, $K(5; 0)$. Напишите уравнение окружности, описанной около этого треугольника.

*Решение:* Так как окружность описана около треугольника $MNK$, то точки $M$, $N$, $K$ лежат на данной окружности, т. е. их координаты удовлетворяют уравнению окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где $(a; b)$ – центр окружности.

$M(-3; 0) \Rightarrow (-3 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \Rightarrow (3 + a)^2 + b^2 = r^2$.

$N(-3; 0) \Rightarrow (1 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2$.

$K(-3; 0) \Rightarrow (5 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \Rightarrow (5 - a)^2 + b^2 = r^2$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (3+a)^2 + b^2 = r^2 \ (1), \\ (3+a)^2 + (3-a)^2 = r^2 \ (2), \\ (5-a)^2 + b_2 = r_2 \ (3). \end{cases}$$

Приравняем левые части уравнений (1) и (3):

$(3 + a)^2 + b^2 = (5 - a)^2 + b^2$; $(3 + a)^2 = (5 - a)^2$.

$3 + a = 5 - a$ или $3 + a = a - 5$.

$a = 1$ – корней нет.

Приравняем левые части уравнений (1) и (2):

$(3 + a)^2 + b^2 = (1 - a)^2 + (3 - b)^2$. Так как $a = 1$, то $4^2 + b^2 = 0^2 + 9 - 6b + b^2$; $6b = 9 - 16$; $b = -\frac{7}{6}$.

Подставим в уравнение (1) значения $a$ и $b$:

$$(1-3)^2 + \left(-\frac{7}{6}\right)^2 = r^2;\ r^2 = 16 + \frac{49}{36} = \frac{16 \cdot 36 + 49}{36} = \frac{625}{36};\ r = \frac{25}{6}.$$

Следовательно, уравнение окружности, описанной около треугольника $MNK$, имеет вид $(x-1)^2 + \left(y + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{625}{36}$.

*Ответ:* $(x-1)^2 + \left(y + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{625}{36}$.

***Критерии оценивания:***

- оценка «5» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «4» – правильно решены три задачи, а при решении четвертой задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решена одна задача.

**VII. Рефлексия учебной деятельности**

1. Какое уравнение называется уравнением данной линии? Приведите примеры.
2. Какой формулой задается уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным $r$?
3. Какой формулой задается уравнение окружности с центром в точке $A(a; b)$ и радиусом, равным $r$?

**Домашнее задание**

1. П. 93, 94, вопросы 15–17 (учебник, с. 244, 245).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 959 (б, г), 962, 964 (а), 966 (б, г) (учебник); II уровень сложности: № 962, 964 (а), 966 (б, г), дополнительную задачу № 3.

# Урок 21. Уравнение прямой

***Основные дидактические цели урока:*** вывести уравнение прямой и показать применение уравнения прямой при решении задач; совершенствовать навыки решения задач методом координат.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

1. Проверка домашнего задания.

Теоретический опрос по вопросам 15–17 учебника.

2. Индивидуальная работа по карточкам.

**I уровень сложности**

1) Окружность задана уравнением $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 49$.

а) Укажите центр окружности и ее радиус.

б) Какие из точек $A(2; 4)$, $B(1; 3)$, $C(-5; -3)$ лежат на данной окружности?

в) Найдите точку с абсциссой $-12$, лежащую на данной окружности.

2) Напишите уравнение окружности с центром $C$ и радиусом $r$, если:

а) $C(-3; 2)$, $r = \sqrt{3}$;

б) $C(0; -6)$, $r = 4\sqrt{5}$.

**II уровень сложности**

1) Окружность задана уравнением $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$. Является ли диаметром данной окружности отрезок $KP$, если $K(-2; 5)$, $P(-2; -3)$?

2) Дана окружность $(x-4)^2+(y+3)^2=100$. Определите, какие из точек $A(-4; 3)$, $B(5; 1)$, $C(-5; 4)$, $D(10; 5)$ лежат:

а) на окружности;

б) внутри круга, ограниченного данной окружностью;

в) вне круга, ограниченного данной окружностью.

**III уровень сложности**

1) Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2-6x+y^2+10y+18=0$, является окружностью. Является ли треугольник $ABC$ вписанным в данную окружность, если известно, что $A(7; -5)$, $B(3; -1)$, $C(-1; -5)$?

2) В прямоугольной системе координат треугольник $SPQ$ задается координатами своих вершин $S(-2; 1)$, $P(2; 4)$, $Q(6; 1)$. Напишите уравнение окружности, вписанной в треугольник.

**II. Повторение изученного материала**

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* математический диктант с последующим обсуждением решения.

*II уровень сложности:* самостоятельное решение задач.

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Найдите расстояние между точками $A(-5; 1)$ и $B(-2; -3)$.

2. Найдите координаты центра окружности с диаметром $CD$, если $C(4; -7)$, $D(2; -3)$.

3. Принадлежит ли точка $E(3; 7)$ линии, заданной уравнением $x^2-4x+y=4$?

4. Функция задана уравнением $y=4x-5$. Какая линия служит графиком этой функции?

5. Проходит ли прямая, заданная уравнением $y=-2x-4$, через первую координатную четверть?

6. Лежит ли точка $P(2; -6)$ внутри круга, ограниченного окружностью $(x-5)^2+(y+3)^2=16$?

7. Определите вид треугольника, заданного координатами своих вершин $A(0; 2)$, $B(2; 6)$, $C(6; -1)$.

***Вариант 2***

1. Найдите расстояние между точками $M(3; -2)$ и $N(-3; 6)$.

2. Найдите координаты центра окружности с диаметром $PK$, если $P(-5; 2)$, $K(-3; 8)$.

3. Принадлежит ли точка $S(2; -5)$ линии, заданной уравнением $\frac{8}{x}-y=9$?

4. Функция задана уравнением $y=-\frac{1}{3}x$. Какая линия служит графиком этой функции?

5. Проходит ли прямая, заданная уравнением $y = 3x + 2$, через четвертую координатную четверть?

6. Лежит ли точка $S(-7; 4)$ вне круга, ограниченного окружностью $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$?

7. Определите вид треугольника, заданного координатами своих вершин $M(-8; -3)$, $N(-2; 6)$, $K(4; -3)$.

*Ответы к заданиям математического диктанта:*

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. 5. | 1. 10. |
| 2. (3; –5). | 2. (–4; 5). |
| 3. Да. | 3. Да. |
| 4. Прямая. | 4. Прямая. |
| 5. Нет. | 5. Нет. |
| 6. Нет. | 6. Да. |
| 7. Прямоугольный. | 7. Равнобедренный. |

**II уровень сложности**

1. Дана окружность $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ и точка $C(5; 4)$. Напишите уравнение окружности, имеющей центр в данной точке и касающейся данной окружности внешним образом.

*Ответ:* $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

2. *Дано:* Окружность с центром в точке $S$, где $A$, $B$ – точки касания, $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle AOB = 60°$ (рис. 10.32).

Напишите уравнение этой окружности.

*Ответ:* $(x - 2)^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = 4$.

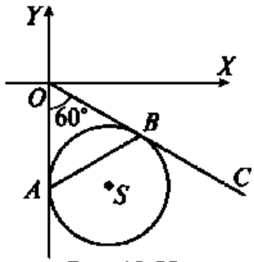



Рис. 10.32

### III. Определение темы урока

(Из курса алгебры 7 класса учащиеся знакомы с уравнением прямой $y = kx + m$.)

Работа в группах.

(Учитель делит класс на две группы. Каждая группа получает одно из заданий. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

***Задание 1.*** Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; -8)$ и $B(-2; 5)$.

***Задание 2.*** Всегда ли уравнение прямой задается уравнением $y = kx + m$? Можно ли это доказать?

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

### IV. Изучение нового материала

1. Вывести уравнение прямой в прямоугольной системе координат (П. 95 учебника).

***Вывод***. Уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени и имеет вид $ax + bx + c = 0$.

2. Вывести уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$:

а) параллельной оси $Ox(y = y_0)$;

б) параллельной оси $Oy(x = x_0)$.

(В ходе изложения нового материала учитель записывает краткий план-конспект на доске, ученики – в тетрадях.)

**V. Закрепление изученного материала**

Работа в парах.

Разобрать решение задач № 26, 28 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

***Задача № 26***

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 2)$ и $B(2; -3)$.

*Решение:* Уравнение прямой имеет вид $ax + by + c = 0$. Точки $A$ и $B$ лежат на прямой, т. е. их координаты удовлетворяют этому уравнению. Подставив координаты точек $A$ и $B$ в уравнение, получаем $a \cdot (-1) + b \cdot 2 + c = 0$; $2 \cdot a + b \cdot (-3) + c = 0$.

Выразим отсюда $a$ и $b$ через $c$, т. е. $a = -5c$ и $b = -3c$. Подставив полученные значения $a$ и $b$ в уравнение $ax + by + c = 0$, приходим к уравнению $-5cx + (-3c)y + c = 0$. При любом $c \neq 0$ это уравнение является уравнением прямой $AB$. Сократив на $-c$, получаем искомое уравнение прямой $AB$ в виде $5x + 3y - 1 = 0$.

*Ответ:* $5x + 3y - 1 = 0$.

***Задача № 28***

Прямые заданы уравнениями $x + y = 0$ и $2x - y + 3 = 0$.

а) Найдите координаты точки пересечения данных прямых.

б) Напишите уравнение прямой, проходяшей через найденную точку и параллельной оси ординат.

*Решение:*

а) Искомая точка лежит на данных прямых, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых, т. е. являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = -1$; $y = 1$.

б) Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно оси ординат, имеет вид $x = x_0$. Учитывая, что $M_0(-1; 1)$, получаем искомое уравнение: $x = -1$.

*Ответ:* а) $(-1; 1)$; б) $x = -1$.

## VI. Самостоятельное решение задач

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задачи № 972 (б), 973, 975.

*II уровень сложности:* задачи № 973, 975 и дополнительная задача.

*Задача № 972 (б)*

*Решение:* Точки $C(2; 5)$ и $D(5; 2)$ лежат на прямой. Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, значит, $2a + 5b + c = 0$ и $5a + 2b + c = 0$.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 2a + 5b + c = 0, \\ 5a + 2b + c = 0. \end{cases}$

Выразим коэффициенты $a$ и $b$ через $c$ и подставим их в уравнение $ax + by + c = 0$.

$a = -\frac{c}{7}$; $b = -\frac{c}{7} \Rightarrow -\frac{c}{7}x - \frac{c}{7}y + c = 0.$

Сократив на $c$ ($c \neq 0$), получаем $x + y - 7 = 0$.

*Ответ:* $x + y - 7 = 0$.

*Задача № 973*

*Решение:* Так как $CM$ – медиана треугольника $ABC$, то $M$ – середина отрезка $AB$, т. е. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 0$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 3 \Rightarrow M(0; 3)$.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $C(-1; -4)$ и $M(0; 3)$. Подставим координаты точек $C$ и $M$ в уравнение прямой $ax + by + c = 0 \Rightarrow 7x - y + 3 = 0$ – уравнение прямой $CM$.

*Задача № 975*

Прямая пересекается с осью $Ox$, значит, $y = 0$, таким образом уравнение имеет вид $3x - 4 \cdot 0 + 12 = 0$, т. е. $(-4; 0)$ – точка пересечения прямой с осью $Oy$.

Чтобы начертить данную прямую, отметим точки $(-4; 0)$, $(0; 3)$ и построим прямую.

*Ответ:* $(0; 3)$; $(-4; 0)$.

*Дополнительная задача*

Параллелограмм $ABCD$ задан координатами трех своих вершин $A(-1; 1)$, $B(1; 7)$, $D(7; -3)$. Напишите уравнения прямых $BC$ и $DC$. Вычислите площадь данного параллелограмма.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;

- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

**VII. Рефлексия учебной деятельности**

1. Какой формулой задается уравнение прямой?
2. Какой формулой задается уравнение прямой, параллельной оси *Ox*? оси *Oy*?
3. Каково уравнения осей координат?
4. Что такое угловой коэффициент прямой?
5. Что можно сказать об угловых коэффициентах параллельных прямых?

**Домашнее задание**

1. П. 95, вопросы 18–20 (учебник, с. 245).
2. Решить задачи № 972 (в), 974, 976, 977.

## Урок 22. Решение задач по теме «Уравнение окружности и прямой»

***Основная дидактическая цель урока:*** совершенствовать навыки решения задач методом координат.

### Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Теоретический опрос.

1) Запишите уравнение прямой. Объясните каждую букву в записанном уравнении.

2) Какой формулой задается уравнение прямой, параллельной оси *Ox*? оси *Oy*?

3) Назовите уравнения осей координат.

4) Что такое угловой коэффициент прямой? Чему равны угловые коэффициенты прямых, записанных формулами $ax + by + c = 0$ и $y = kx + d$?

5) Что можно сказать об угловых коэффициентах параллельных прямых?

2. Индивидуальная работа с последующей проверкой в ходе беседы учителя с учеником.

Решить задачи № 20, 21, 24 (а, б) (рабочая тетрадь).

3. Самостоятельное решение задач.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задачи № 960, 963, 965, 967, 977 (фронтальная работа с частью учащихся).

*II уровень сложности:* задачи № 1, 2, 20, 21, 24 (с последующим обсуждением).

**II уровень сложности**

***Задача 1***

Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y - x = 0$, $y + x = 0$, $y - 2x + 4 = 0$.

*Ответ:* $5\frac{1}{3}$ кв. ед.

***Задача 2***

Составьте уравнение прямой, если точка $C(3; 4)$ служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат на эту прямую.

*Ответ:* $3x + 4y - 25 = 0$.

***Задача № 20***

Даны точки $A(-1; 2)$, $B(0; \sqrt{3})$, $C(1; -2)$, $D(2; -1)$. Какие из этих точек лежат на линии $L$, заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$?

*Решение*: Точка лежит на линии, заданной уравнением с двумя переменными $x$ и $y$, если ее координаты удовлетворяют этому уравнению, и не лежит на линии, если ее координаты не удовлетворяют уравнению линии.

Подставим координаты точек в уравнение $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$, получаем $(-1)^2 - 2(-1) + 2^2 - 3 = 1 + 2 + 4 - 3 = 0$. Координаты точки $A$ не удовлетворяют данному уравнению, следовательно, точка $A$ не лежит на линии $L$. $A \notin L$.

$0^2 - 2 \cdot 0 + (\sqrt{3})^2 - 3 = 0 - 0 + 3 - 3 = 0$. Следовательно, $C \in L$.

$2^2 - 2 \cdot 2 + (-1)^2 - 3 = 4 - 4 + 1 - 3 \neq 0$. Следовательно, $D \in L$.

*Ответ:* $B$, $C \in L$.

***Задача 21***

Какие из следующих уравнений задают окружность:

а) $x^2 + (y - 1)^2 = 25$;

б) $4x^2 + 4y^2 = 9$;

в) $2x^2 + 2y^2 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

д) $(x + 2)^2 + y^2 - 0{,}01 = 0$;

е) $x^2 - 2x + y = 3$?

*Решение:*

а) Уравнение $x^2 + (y - 1)^2 = 25$ имеет вид $(x - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$, где $a = 0$, $b = 1$, $r = 5 \neq 0$, следовательно, это уравнение задает окружность.

б) Разделив обе части уравнения $4x^2 + 4y^2 = 9$ на 4, получаем уравнение $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$, которое имеет вид: $(x - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$, где $a = 0$, $b = 0$, $r = \frac{3}{2} \neq 0$. Следовательно, это уравнение задает окружность.

в) Равенство $2x^2 + 2y^2 = 0$ выполняется только при $x = 0$, $y = 0$, т. е. данному уравнению удовлетворяют координаты только одной точки (0; 0). Следовательно, это уравнение не задает окружность.

г) Левая часть уравнения $x^2 + y^2 + 1 = 0$ при любых значениях $x$ и $y$ больше нуля, а правая часть равна нулю. Поэтому точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, не существует. Следовательно, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не задает окружность.

д) Перенеся слагаемое (–0,01) в правую часть уравнения $(x + 2)^2 + y^2 - 0{,}01 = 0$, получаем уравнение $(x + 2)^2 + y^2 = 0{,}01$, которое имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где $a = -2$, $b = 0$, $r = 0{,}1 \neq 0$. Следовательно, уравнение $(x + 2)^2 + y^2 - 0{,}01 = 0$ задает окружность.

е) Прибавив к обеим частям уравнения $x^2 - 2x + y = 3$ число 1, получаем уравнение $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4$, которое можно записать в виде $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 4$, т. е. в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где $a = 1$, $b = 0$, $r = 2 \neq 0$. Следовательно, данное уравнение задает окружность.

*Ответ:* Окружность задают уравнения а, б, д, е.

***Задача № 24 (а, б)***

Напишите уравнение окружности радиуса $r$ с центром в точке $C$, если:

а) $r = 2$ и $C(3; 0)$;

б) $r = 3$ и $C(0; -2)$.

*Ответ:* а) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + (y + 2)^2 = 9$.

## III. Решение задач

1. Работа в группах.

Разобрать решение задач № 980, 969 (а) с последующим обсуждением.

***Задача № 980***

*Решение:* Так как диагонали лежат на осях координат, то вершины ромба $ABCD$ имеют координаты (рис. 10.33):

а) $A(-2; 0)$, $B(0; 5)$, $C(2; 0)$, $D\ (0; -5)$;

б) $A_1(-5; 0)$, $B_1(0; 2)$, $C_1(5; 0)$, $D_1(0; -2)$.

Рассмотрим случай а).

Напишем уравнение прямой $AB$:

$A(-2;\ 0) \Rightarrow -2a + 0 \cdot b + c = 0 \Rightarrow a = 0{,}5c;$

$B(0;\ 5) \Rightarrow 0 \cdot a + 5b + c = 0 \Rightarrow b = -0{,}2c \Rightarrow 5x - 2y + 10 = 0.$

Напишем уравнение прямой $BC$:

$B(0;\ 5) \Rightarrow 0 \cdot a + 5b + c = 0 \Rightarrow b = -0{,}2c;$

$C(2;\ 0) \Rightarrow 2a + 0 \cdot b + c = 0 \Rightarrow a = -0{,}5c \Rightarrow 5x + 2y - 10 = 0.$

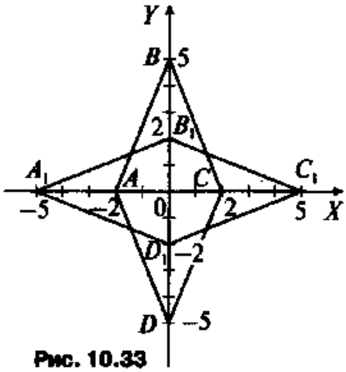



Рис. 10.33

Напишем уравнение прямой $CD$:

$C(2;\ 0) \Rightarrow 2a + 0 \cdot b + c = 0 \Rightarrow a = -0{,}5c;$

$D(0;\ -5) \Rightarrow 0 \cdot a - 5b + c = 0 \Rightarrow b = 0{,}2c \Rightarrow 5x - 2y - 10 = 0.$

Напишем уравнение прямой $AD$:

$A(-2;\ 0) \Rightarrow -2a + 0 \cdot b + c = 0 \Rightarrow a = 0{,}5c;$

$D(0;\ -5) \Rightarrow 0 \cdot a - 5b + c = 0 \Rightarrow b = 0{,}2c \Rightarrow 5x + 2y + 10 = 0.$

Случай б) решается аналогично.

*Ответ:*

а) $5x - 2y + 10 = 0$; $5x + 2y - 10 = 0$; $5x - 2y - 10 = 0$; $5x + 2y + 10 = 0$;

б) $2x - 5y + 10 = 0$; $2x + 5y - 10 = 0$; $2x - 5y - 10 = 0$; $2x + 5y + 10 = 0$.

Вопросы для обсуждения.

- Как поместить ромб в прямоугольную систему координат, чтобы наиболее удобным способом определить координаты вершин ромба?
- Сколькими способами это можно сделать?
- Как написать уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты которых известны?

***Задача № 969 (а)***

*Решение:* Так как $MN$ – диаметр окружности, то центр окружности (точка $O$) является серединой отрезка $MN$, тогда

$$x_O = \frac{x_M + x_N}{2} = 2;\ y_O = \frac{y_M + y_N}{2} = 1,\ \text{следовательно},\ O(2;\ 1).$$

Точка $M(-3;\ 5)$ лежит на окружности, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению окружности. Подставим координаты точек $M$ и $O$ в уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$: $(-3 - 2)^2 + (5 - 1)^2 = r^2 \Rightarrow 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow r^2 = 41.$

Уравнение окружности имеет вид $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 41.$

*Ответ:* $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 41.$

Вопросы для обсуждения.

– Какой формулой задается уравнение окружности? Что вы можете сказать о точках $(x_0; y_0)$, $(x; y)$?
– Можно ли определить координаты центра окружности, если известны координаты концов диаметра $MN$?
– Как вычислить радиус окружности, если известно, что точки $M$ и $N$ лежат на окружности, точка $O$ – центр окружности, координаты точек $M$, $N$, $O$ известны?
– Напишите уравнение окружности.

2. Самостоятельное решение задач.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задача № 968.

*II уровень сложности:* задача № 971.

***Задача № 968***

*Решение:* Так как точка $A(0; 6)$ является центром окружности, то уравнение окружности имеет вид $x^2 + (y - 6)^2 = r^2$. Точка $B(-3; 2)$ лежит на данной окружности, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению $x^2 + (y - 6)^2 = r^2$, т. е. $(-3)^2 + (2 - 6)^2 = r^2$, тогда $r^2 = 9 + 16 = 25$.

Уравнение окружности имеет вид $x^2 + (y - 6)^2 = 25$.

*Ответ:* $x^2 + (y - 6)^2 = 25$.

***Задача № 971***

*Решение:* Так как точки $A(-3; 0)$ и $B(0; 9)$ лежат на окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению окружности.

Центр окружности лежит на оси ординат, значит, имеет координаты $(0; b)$, т. е. уравнение окружности имеет вид: $x^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Подставив координаты точек $A$ и $B$ в данное уравнение, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(-3)^2 + (0 - b)^2 = r^2,\\ 0^2 + (9 - b)^2 = r^2.\end{cases}$$

Решив данную систему, получаем $b = 4$, $r^2 = 25$, тогда уравнение окружности примет вид $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

*Ответ:* $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за работу в группах и за самостоятельное решение задач.)

## IV. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Окружность с центром в точке $A(-5; 3)$ проходит через точку $B(2; -1)$. Напишите уравнение этой окружности.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $B(-2; 4)$.

3. Выясните взаимное расположение прямой $x = -5$ и окружности $(x - 7)^2 + (y - 6)^2 = 81$.

***Вариант 2***

1. Окружность с центром в точке $M(2; -4)$ проходит через точку $N(-3; 1)$. Напишите уравнение этой окружности.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $C(-6; -3)$.

3. Выясните взаимное расположение прямой $y = 25$ и окружности $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 100$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Окружность проходит через точки $M(2; 0)$ и $N(-4; 8)$. Напишите уравнение этой окружности, если отрезок $MN$ является ее диаметром.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 3)$ и $B(-2; -3)$.

3. Выясните взаимное расположение окружности, заданной уравнением $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$, и прямой $y = -1$.

***Вариант 2***

1. Окружность проходит через точки $P(8; -4)$ и $T(-2; 6)$. Напишите уравнение этой окружности, если известно, что $PT$ – диаметр этой окружности.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(3; 5)$ и $N(-6; -1)$.

3. Выясните взаимное расположение окружности, заданной уравнением $(x + 7)^2 + (y + 4)^2 = 25$, и прямой $y = -7$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 + 8x + y^2 - 6x - 24 = 0$, является уравнением окружности. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $(5; -6)$.

2. Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и прямой, проходящей через точки $A(1; 10)$ и $B(-1; -4)$.

3. Выясните взаимное расположение прямой $x + y = 2$ и окружности $x^2 + y^2 = 4$. Найдите расстояние от центра окружности до прямой.

***Вариант 2***

1. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 - 10x + y^2 + 4x - 7 = 0$, является уравнением окружности. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $(-6; 4)$.

2. Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и прямой, проходящей через точки $M(2; 9)$ и $N(-1; -3)$.

3. Выясните взаимное расположение прямой $x - y = 4$ и окружности $x^2 + y^2 = 16$. Найдите расстояние от центра окружности до прямой.

*Ответы к задачам самостоятельной работы:*

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 65$.
2. $2x + y = 0$.
3. Нет общих точек.

***Вариант 2***

1. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 50$.
2. $x - 2y = 0$.
3. Нет общих точек.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
2. $2x - y + 1 = 0$.
3. Пересекаются в точках $(0; -1)$ и $(6; -1)$.

***Вариант 2***

1. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 50$.
2. $2x - 3y + 9 = 0$.
3. Пересекаются в точках $(-3; -7)$ и $(-11; -7)$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. 9 ед.
2. $\frac{9}{14}$ кв. ед.
3. Пересекаются в точках $(0; 2)$ и $(2; 0)$; $\sqrt{2}$.

***Вариант 2***

1. 6 ед.
2. $\frac{1}{8}$ кв. ед.
3. Пересекаются в точках $(-4; 0)$ и $(0; 4)$; $2\sqrt{2}$.

## V. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой формулой задается уравнение прямой?
2. Какой формулой задается уравнение прямой, параллельной оси $Ox$, оси $Oy$?
3. Назовите уравнения осей координат.

4. Какой формулой задается уравнение окружности? Что вы можете сказать о точках $(x_0;\ y_0)$, $(x;\ y)$?
5. Что можно сказать об угловых коэффициентах параллельных прямых?

**Домашнее задание**

Решить задачи. I уровень сложности: № 978, 979, 969 (б) (учебник), № 23 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 978, 979, 969 (б), 970 (учебник).

## Урок 23. Подготовка к контрольной работе по теме «Метод координат»

***Основные дидактические цели урока:*** закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки, подготовить учащихся к контрольной работе; совершенствовать навыки решения задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

Проверочный тест.

(Задания теста учащиеся выполняют самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справилось большинство учащихся.)

***Вариант 1***

1. Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, то:

а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$;

в) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

2. Если $\vec{a} = 5\vec{j} - 3\vec{i}$, то:

а) $\vec{a}\{5;\ -3\}$; б) $\vec{a}\{5;\ 3\}$; в) $\vec{a}\{-3;\ 5\}$.

3. Если $A(2;\ -5)$, $B(-4;\ -2)$, то:

а) $\overrightarrow{AB}\{-6;\ 3\}$; б) $\overrightarrow{AB}\{6;\ -3\}$; в) $\overrightarrow{AB}\{-2;\ -7\}$.

4. Если $\vec{x}\{3;-6\}$, $\vec{y}\{-2;\ 4\}$, $\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$, то:

а) $\vec{c}\{2;-4\}$; б) $\vec{c}\{1;\ 1\}$; в) $\vec{c}\{-2;\ 4\}$.

5. Если $\vec{x}\{2;\ -5\}$, $\vec{y}\{1;\ 2{,}5\}$, $\vec{z}\left\{-\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{4}\right\}$, то коллинеарны векторы:

а) $\vec{x}$ и $\vec{y}$; б) $\vec{x}$ и $\vec{z}$; в) $\vec{z}$ и $\vec{y}$.

6. Если $AM$ – медиана треугольника $ABC$, $B(2;\ -5)$, $C(-6;\ 3)$, то:

а) $M(-2;\ -1)$; б) $M(4;\ -4)$; в) $M(-4;\ 4)$.

7. Если $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$, то:

а) $|\vec{a}| = 1$; б) $|\vec{a}| = 5$; в) $|\vec{a}| = \sqrt{7}$.

8. В треугольнике $ABC$ $A(-2;\ 2)$, $B(2;\ 6)$, $C(4;\ -2)$. Если $BM$ – медиана, то:

а) $BM = \sqrt{37}$; б) $BM = \sqrt{45}$; в) $BM = \sqrt{35}$.

9. Если точки $C(-2;\ 1)$ и $D(6;\ 5)$ – концы диаметра окружности, то уравнение данной окружности имеет вид:

а) $(x + 2)^2 + (x + 3)^2 = \sqrt{20}$;

б) $(x - 4)^2 + (x - 3)^2 = 12$;

в) $(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 20$.

10. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;\ 1)$ и $B(2;\ 7)$, имеет вид:

а) $x - 2y + 3 = 0$;

б) $2x - y + 3 = 0$;

в) $2x + y - 3 = 0$.

***Вариант 2***

1. Если точки $M$, $N$, $K$ лежат на одной прямой, то:

а) $\overline{MN} \uparrow\uparrow \overline{NK}$;

б) $\overline{MN} \uparrow\downarrow \overline{NK}$;

в) $\overline{MN} = k \cdot \overline{NK}$.

2. Если $\vec{b}\{-2;\ 7\}$ то:

а) $\vec{b} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$; б) $\vec{b} = 7\vec{j} - 2\vec{i}$; в) $\vec{b} = -2\vec{i} - 7\vec{j}$.

3. Если $M(-3;\ 4)$, $N(-1;\ -5)$, то:

а) $\overline{MN}\{-4;-1\}$; б) $\overline{MN}\{-2;\ 9\}$; в) $\overline{MN}\{2;-9\}$.

4. Если $\vec{a}\{4;-2\}$, $\vec{b}\{6;-3\}$, $\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, то:

а) $\vec{p}\{-4;\ 2\}$; б) $\vec{p}\{4;-2\}$; в) $\vec{p}\{4;\ 2\}$.

5. Если $\vec{a}\{3;-4\}$, $\vec{b}\{-0{,}75;\ 1\}$, $\vec{c}\{-6;-8\}$, то коллинеарны векторы:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{c}$ и $\vec{b}$.

6. Если $O$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, $A(3; -7)$, $C(-5; -1)$, то:

а) $O(4; -3)$; б) $O(-1; -4)$; в) $O(-4; 3)$.

7. Если $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$, то:

а) $|\vec{b}| = 2$; б) $|\vec{b}| = \sqrt{28}$; в) $|\vec{b}| = 10$.

8. В треугольнике $MNK$ $M(-2; 4)$, $N(4; 6)$, $K(6; -2)$. Если $MA$ – медиана, то:

а) $MA = \sqrt{85}$; б) $MA = \sqrt{53}$; в) $MA = \sqrt{45}$.

9. Если точки $A(-3; -3)$ и $B(5; 1)$ – концы диаметра окружности, то уравнение данной окружности имеет вид:

а) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$;

б) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 12$;

в) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 74$.

10. Уравнение прямой, проходящей через точки $C(-4; -4)$ и $D(6; 1)$, имеет вид:

а) $x - 2y - 2 = 0$;

б) $x + 2y + 2 = 0$;

в) $2x - y + 2 = 0$.

*Ответы к тесту:*

***Вариант 1:*** 1 – б; 2 – в; 3 – а; 4 – в; 5 – б; 6 – а; 7 – б; 8 – а; 9 – в; 10 – б.

***Вариант 2:*** 1 – в; 2 – б; 3 – в; 4 – а; 5 – а; 6 – б; 7 – в; 8 – б; 9 – а; 10 – а.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 9–10 баллов;
- оценка «4» – 7–8 баллов;
- оценка «3» – 5–6 баллов;
- оценка «2» – менее 5 баллов.

## III. Определение темы урока

(На интерактивной доске записаны ответы к тесту. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

## IV. Решение задач

1. Работа в парах.

Решить задачи № 25, 29 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

***Задача № 25***

Напишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку $AB$, если $A(-3; 4)$, $B(1; -2)$.

*Решение:* Если точка $M(x; y)$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$, то $AM = BM$, и поэтому $AM^2 = BM^2$. Запишем это равенство в координатах $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$.

Раскрыв скобки, получаем $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4$.

Перенесем все слагаемые из правой части в левую часть равенства $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - x^2 + 2x - 1 - y^2 - 4y - 4 = 0$. Приведем подобные члены $8x - 12y + 20 = 0$. Разделив обе части уравнения на 4, получаем $2x - 3y + 5 = 0$.

Если точка $M(x; y)$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению $2x - 3y + 5 = 0$. Если же точка $M(x; y)$ не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$, то $AM^2 \neq BM^2$, и поэтому ее координаты не удовлетворяют полученному уравнению.

Итак, уравнение $2x - 3y + 5 = 0$ является уравнением серединного перпендикуляра к отрезку $AB$.

*Ответ:* $2x - 3y + 5 = 0$.

***Задача № 29***

Окружность и прямая заданы уравнениями $x^2 + (y - 4)^2 = 25$ и $x - 7y + 3 = 0$. Найдите длину хорды, отсекаемой окружностью на прямой.

*Решение:* Чтобы найти координаты точек пересечения окружности и прямой, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 25, \\ x - 7y + 3 = 0. \end{cases}$$

Последовательно получаем:

$x = 7y - 3$; $(7y - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$;

$49y^2 - 42y + y^2 - 8y + 16 = 25$;

$50y^2 - 50y = 0$; $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Находим $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$.

Итак, данные окружность и прямая пересекаются в точках $(-3; 0)$ и $(4; 1)$.

Искомая длина хорды равна

$$\sqrt{(-3-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

*Ответ:* $5\sqrt{2}$.

2. Самостоятельное решение задач.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задачи № 19, 23, 27 (рабочая тетрадь).

*II уровень сложности:* задачи № 1003, 1006 (учебник).

***Задача № 19***

*Дано:* Точки $A(-2; -3)$, $B(-3; 4)$, $C(4; 5)$.

*Доказать:* В треугольнике $ABC$ углы $A$ и $C$ равны.

*Найти:* Площадь треугольника $ABC$.

***Решение:***

1) В треугольнике $ABC$ углы $A$ и $C$ равны, если $BC = BA$. Так как $BC^2 = (-3 - 4)^2 + (4 - 5)^2 = 50$, $BA^2 = (-2 + 3)^2 + (-3 - 4)^2 = 50$, то $BC = BA$. Следовательно, $\angle A = \angle C$.

2) В данном равнобедренном треугольнике $ABC$ основанием служит сторона $AC$, следовательно, медиана, проведенная из вершины $B$, является высотой треугольника. Найдем $AC$ и медиану $BM$. $AC = \sqrt{(-2-4)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{100} = 10$. Так как точка $M$ — середина стороны $AC$, то $M(1; 1)$ и поэтому

$BM = \sqrt{(1+3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Итак, $S_{ABC} = 0{,}5 \cdot BM = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 5 = 25$.

*Ответ:* 25 кв. ед.

***Задача № 23***

Окружность задана уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Не пользуясь чертежом, установите, какие из точек $A(3; -2)$, $B(-4; 6)$ и $C(3; -1)$ лежат на окружности.

***Первый способ решения:*** Выясним, координаты каких точек удовлетворяют уравнению окружности.

$(3 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \neq 25$. Координаты точки $A$ не удовлетворяют данному уравнению, следовательно, точка $A$ не лежит на окружности.

$(-4 + 1)^2 + (6 - 2)^2 = 9 + 16 = 25$. Координаты точки $B$ удовлетворяют данному уравнению, следовательно, точка $B$ лежит на окружности.

$(3 + 1)^2 + (-1 - 2)^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Координаты точки $C$ удовлетворяют данному уравнению, следовательно, точка $C$ лежит на окружности.

***Второй способ решения:*** Центр данной окружности — точка с координатами $(-1; 2)$, а радиус окружности равен 5. Найдем расстояние от центра данной окружности до каждой из данных точек и сравним их с радиусом окружности. Обозначим центр окружности буквой $M$. Тогда:

$AM = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{16+16} \neq 5$, следовательно, точка $A$ не лежит на окружности.

$BM = \sqrt{(-1+4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно, точка $B$ лежит на окружности.

$CM = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно, точка $C$ лежит на окружности.

*Ответ:* На данной окружности лежат точки $B$ и $C$.

***Задача № 27***

Даны координаты вершин треугольника $A(-3;\ 0)$, $B(1;\ 4)$, $C(3;\ 0)$. Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника, параллельную стороне $AB$.

*Решение:* Обозначим середины сторон $BC$ и $AC$ буквами $K$ и $M$ соответственно. Тогда $K(2;\ 2)$, $M(0;\ 0)$, а прямая $KM$ – искомая. Запишем ее уравнение в виде $ax + by + c = 0$. Подставив координаты точек $K$ и $M$ в это уравнение, получаем систему:

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 0, \\ 0a + 0b + c = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $c = 0$ и $b = -a$. Следовательно, искомое уравнение $ax - ay = 0$ или $x - y = 0$.

*Ответ:* $x - y = 0$.

***Задача № 1003***

а) Пусть серединный перпендикуляр к стороне $AB$ проходит через точку $E(x;\ y)$.

Тогда $AE^2 = BE^2 \Rightarrow (x + 7)^2 + (y - 5)^2 = (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \Rightarrow 20x - 12y + 64 = 0 \Rightarrow 5x - 3y + 16 = 0$ – уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к стороне $AB$.

Пусть серединный перпендикуляр к стороне $AC$ проходит через точку $P(x;\ y)$.

Тогда $AP^2 = CP^2 \Rightarrow (x + 7)^2 + (y - 5)^2 = (x - 5)^2 + (y - 3)^2 \Rightarrow 24x - 4y + 40 = 0 \Rightarrow 6x - y + 10 = 0$ – уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к стороне $AC$.

Пусть серединный перпендикуляр к стороне $BC$ проходит через точку $K(x;\ y)$.

Тогда $BK^2 = CK^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = (x - 5)^2 + (y - 3)^2 \Rightarrow 4x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$ – уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к стороне $BC$.

б) Составим уравнение прямой $AB$.

$A(-7;\ 5)$ лежит на прямой $\Rightarrow -7a + 5b + c = 0$. (1)

$B(3;\ -1)$ лежит на прямой $\Rightarrow 3a - b + c = 0$. (2)

Из уравнений (1) и (2) выразим $a$ через $b$ и $c$ и приравняем

$$a = \frac{b-c}{3};\ a = \frac{5b+c}{7} \Rightarrow \frac{b-c}{3} = \frac{5b+c}{7} \Rightarrow b = -\frac{5}{4}c \Rightarrow a = -\frac{3}{4}c.$$

Подставим $a$ и $b$ в уравнение прямой $ax + by + c = 0 \Rightarrow$

$$-\frac{3}{4}cx - \frac{5}{4}cy + c = 0 \Rightarrow 3x + 5y - 4 = 0$$ – уравнение прямой $AB$.

Составим уравнение прямой *BC* аналогичным способом:

$$\begin{cases}3a - b + c = 0,\\ 5a + 3b + c = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{b-c}{3},\\ a = -\dfrac{3b+c}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{2}{7}c,\\ b = \dfrac{1}{7}c\end{cases} \Rightarrow$$

$2x - y - 7 = 0$ – уравнение прямой *BC*.

Составим уравнение прямой *AC*:

$$\begin{cases}7a + 5b + c = 0,\\ 5a + 3b + c = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{5b+c}{7},\\ a = -\dfrac{3b+c}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{1}{23}c,\\ b = -\dfrac{6}{23}c\end{cases} \Rightarrow$$

$x + 6y - 23 = 0$ – уравнение прямой *AC*.

в) Найдем середины сторон *AB*, *BC*, *AC* треугольника *ABC* – точек *M*, *N* и *K* соответственно: $M(-2; 2)$, $N(4; 1)$, $K(-1; 4)$.

Составим уравнение прямой *MN*:

$$\begin{cases}-2a + 2b + c = 0,\\ 4a + b + c = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \dfrac{2b+c}{2},\\ a = -\dfrac{b+c}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -0{,}1c,\\ b = -0{,}6c\end{cases} \Rightarrow$$

$x + 6y - 10 = 0$ – уравнение прямой *MN*.

Составим уравнение прямой *NK*:

$$\begin{cases}4a + b + c = 0,\\ -a + 4b + c = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{b+c}{4},\\ a = 4b + c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{3}{17}c,\\ b = -\dfrac{5}{17}c\end{cases} \Rightarrow$$

$3x + 5y - 17 = 0$ – уравнение прямой *NK*.

Составим уравнение прямой *MK*:

$$\begin{cases}-2a + 2b + c = 0,\\ -a + 4b + c = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \dfrac{2b+c}{2},\\ a = 4b + c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \dfrac{1}{3}c,\\ b = -\dfrac{1}{6}c\end{cases} \Rightarrow$$

$2x - y + 6 = 0$ – уравнение прямой *MK*.

*Ответ:* а) $5x - 3y + 16 = 0$; $x + 2y - 6 = 0$; $6x - y + 10 = 0$; б) $3x + 5y - 4 = 0$; $2x - y - 7 = 0$; $x + 6y - 23 = 0$; в) $3x + 5y + 17 = 0$; $2x - y + 6 = 0$; $x + 6y - 10 = 0$.

***Задача № 1006***

*Первый случай:* Поместим данный треугольник в прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке (рис. 10.34).

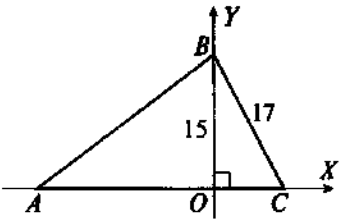



Рис. 10.34

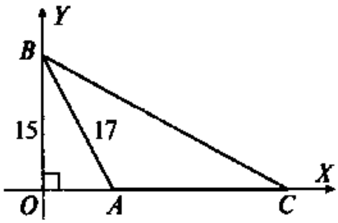



Рис. 10.35

Из прямоугольного $\Delta OBC$ $OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$, тогда $AO = 28 - 8 = 20$.

Точки $A$, $B$, $C$ имеют координаты $A(-20; 0)$, $B(0; 15)$, $C(8; 0)$.

Найдем медианы треугольника.

1) Пусть $AK$ – середина $BC$, тогда $K(4; 7{,}5)$, отсюда

$$AK = \sqrt{(4+20)^2 + (7{,}5-0)^2} = \sqrt{24^2 + 7{,}5^2} = \frac{\sqrt{2529}}{2} \text{ см.}$$

2) Пусть $M$ – середина $AB$, тогда $M(-10; 7{,}5)$, отсюда

$$CM = \sqrt{(-10-8)^2 + (7{,}5-0)^2} = \sqrt{324 + 56{,}25} = 19{,}5 \text{ см.}$$

3) Пусть $N$ – середина $AC$, тогда $N(-6; 0)$, отсюда

$$BN = \sqrt{(-6-0)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{261} \text{ см.}$$

*Второй случай:* Рассуждая аналогично, получаем $OA = 8$, $OC = 36$, тогда $A(8; 0)$, $B(0; 15)$, $C(36; 0)$ (рис. 10.35).

1) $K(18; 7{,}5)$ – середина $BC$.

$$AK = \sqrt{(18-8)^2 + (7{,}5-0)^2} = 12{,}5 \text{ см.}$$

2) $M$ – середина $AB \Rightarrow M(4; 7{,}5)$.

$$CM = \sqrt{(4-36)^2 + (7{,}5-0)^2} = \frac{\sqrt{4321}}{2} \text{ см.}$$

3) $N$ – середина $AC \Rightarrow N(22; 0)$.

$$BN = \sqrt{(22-0)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{709} \text{ см.}$$

*Ответ:* 1) $\frac{\sqrt{2529}}{2}$ см; 19,5 см; $\sqrt{261}$ см или 2) 12,5 см; $\frac{\sqrt{4321}}{2}$ см; $\sqrt{709}$ см.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение теоретического теста и за самостоятельное решение задач.)

### V. Рефлексия учебной деятельности

Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 990, 992, 993, 996 (учебник); II уровень сложности: № 998, 999, 1001, 1002 (учебник).

# Урок 24. Контрольная работа № 2 по теме «Метод координат»

***Основная дидактическая цель урока:*** проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Метод координат».

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Контрольная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{m} - \vec{n},\ \vec{m}\{-3;\ 6\},\ \vec{n}\{2;\ -2\}.$$

2. Напишите уравнение окружности с центром в точке $A(-3;\ 2)$, проходящей через точку $B(0;\ -2)$.

3. Треугольник $MNK$ задан координатами своих вершин: $M(-6;\ 1)$, $N(2;\ 4)$, $K(2;\ -2)$.

а) Докажите, что $\Delta MNK$ – равнобедренный.

б) Найдите высоту, проведенную из вершины $M$.

4*. Найдите координаты точки $N$, лежащей на оси абсцисс и равноудаленной от точек $P(-1;\ 3)$ и $K(0;\ 2)$.

***Вариант 2***

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{b}$, если

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d},\ \vec{c}\{6;\ -2\},\ \vec{d}\{1;\ -2\}.$$

2. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(2;\ 1)$, проходящей через точку $D(5;\ 5)$.

3. Треугольник $CDE$ задан координатами своих вершин: $C(2; 2)$, $D(6; 5)$, $E(5; -2)$.

а) Докажите, что $\Delta CDE$ – равнобедренный.

б) Найдите биссектрису, проведенную из вершины $C$.

4*. Найдите координаты точки $A$, лежащей на оси ординат и равноудаленной от точек $B(1; -3)$ и $C(2; 0)$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. В прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a}\{3; -2\}$ и $\vec{b}\{1; -2\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 5\vec{a} - 9\vec{b}$ и его длину. Постройте вектор $\vec{c}$, если известно, что его конец совпадает с точкой $M(3; 2)$.

2. Выясните, принадлежит ли точка $A(1; \sqrt{3})$ окружности с центром в точке $B(5; 0)$ и радиусом, равным $\sqrt{19}$.

3. Докажите, что четырехугольник $MNKP$, заданный координатами своих вершин $M(2; 2)$, $N(5; 3)$, $K(6; 6)$, $P(3; 5)$, является ромбом, и вычислите его площадь.

4*. В равнобедренном треугольнике основание равно 12 см, а высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.

***Вариант 2***

1. В прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a}\{3; -2\}$ и $\vec{b}\{1; -1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и его длину. Постройте вектор $\vec{c}$, если известно, что его конец совпадает с точкой $M(1; 4)$.

2. Выясните, принадлежит ли точка $C(2; \sqrt{5})$ окружности с центром в точке $D(7; 0)$ и радиусом, равным $\sqrt{30}$.

3. Докажите, что четырехугольник $PSQT$, заданный координатами своих вершин $P(3; 0)$, $S(-1; 3)$, $Q(-4; -1)$, $T(0; -4)$, является квадратом, и вычислите его площадь.

4*. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а биссектриса, проведенная к основанию, равна 18 см. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Определите значение $x$, при котором вектор $\vec{a}\{2 - x; 2x + 3\}$ коллинеарен вектору $\vec{b}\{-2; 5\}$.

2. Используя метод координат, решите систему уравнений:
$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4,\\(x-9)^2+(y-8)^2=64.\end{cases}$$

3. В параллелограмме $ABCD$ точка $K$ – середина $BC$, точка $D$ – середина $CP$, точка $M$ лежит на отрезке $BP$ и $BM : MP = 1 : 3$. Разложите по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ следующие векторы: а) $\overline{DB}$; б) $\overline{KA}$; в) $\overline{BP}$; г) $\overline{AM}$.

4*. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD = 5$, $BC = CD = 3\sqrt{2}$, $AC = 7$. Применив метод координат, найдите расстояние между серединами противоположных сторон четырехугольника $ABCD$.

***Вариант 2***

1. Определите значение $x$, при котором вектор $\vec{a}\{-4-2x; 3x+2\}$ коллинеарен вектору $\vec{b}\{3;-4\}$.

2. Используя метод координат, решите систему уравнений:
$$\begin{cases}(x+4)^2+(y+3)^2=9,\\(x+1)^2+(y-1)^2=4.\end{cases}$$

3. В параллелограмме $ABCD$ точка $M$ – середина $DC$, точка $D$ – середина $AE$, точка $K$ лежит на отрезке $CE$ и $CK : KE = 1 : 2$. Разложите по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ следующие векторы: а) $\overline{CA}$; б) $\overline{AM}$; в) $\overline{BE}$; г) $\overline{BK}$.

4*. В параллелограмме стороны равны 10 см и 20 см, острый угол равен 60°. Применив метод координат, найдите диагонали параллелограмма.

***Ответы к задачам контрольной работы:***

**I уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. $\vec{a}\{-3; 4\}$, $\lvert\vec{a}\rvert = 5$. | 1. $\vec{b}\{4;-3\}$, $\lvert\vec{b}\rvert = 5$. |
| 2. $(x+3)^2+(y-2)^2=25$. | 2. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$. |
| 3. б) 8 ед. | 3. б) $\sqrt{12,5}$ ед. |
| 4. $N(-3; 0)$. | 4. $A(0; -1)$. |

**II уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. $\vec{c}\{6; 8\}$, $\lvert\vec{c}\rvert = 10$. | 1. $\vec{c}\{-7; 5\}$, $\lvert\vec{c}\rvert = \sqrt{74}$. |
| 2. Да. | 2. Да. |
| 3. 8 кв. ед. | 3. 25 кв. ед. |
| 4. $\sqrt{97}$ см. | 4. 15 см. |

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $x = 16$.
2. (2,6; 3,2).
3. а) $-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}$; г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
4. $\frac{\sqrt{85}}{2}$.

***Вариант 2***

1. $x = 10$.
2. (–2,2; –0,6).
3. а) $-\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; в) $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$; г) $\frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
4. $10\sqrt{7}$ см; $10\sqrt{3}$ см.

## III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту ответы к задачам контрольной работы.

## Домашнее задание

Решить контрольную работу следующего уровня сложности.

# Глава XI
# СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

***Формируемые УУД:*** *предметные:* ввести понятия синуса, косинуса и тангенса углов от 0 до 180°; развивать тригонометрический аппарат как средство решения геометрических задач; ввести понятие скалярного произведения векторов, рассмотреть его свойства; рассмотреть теоремы синусов и косинусов; познакомить учащихся с теоремой площади треугольника, с основными алгоритмами решения произвольных треугольников; научить применять теоремы синусов и косинусов, скалярное произведение векторов при решении задач; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал; извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

# Урок 25. Синус, косинус и тангенс угла

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия синуса, косинуса и тангенса для углов от 0 до 180°; вывести основное тригонометрическое тождество и формулы для вычисления координат точки; рассмотреть формулы приведения $\sin(90° - \alpha)$, $\cos(90° - \alpha)$, $\sin(180° - \alpha)$, $\cos(180° - \alpha)$.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок, допущенных в контрольной работе

1. Провести общий анализ контрольной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

### III. Актуализация знаний учащихся

Проверочный тест.

(Задания теста учашиеся выполняют самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справилось большинство учащихся.)

***Вариант 1***

Рис. 11.1.

1. Синус угла $A$ равен:

а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{3}$.

2. Тангенс угла $B$ равен:

а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{4}$.

3. Косинус 60° равен:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Если $\sin\alpha = \frac{5}{9}$, то $\cos\alpha$ равен:

а) $\frac{9}{5}$; б) $\frac{56}{81}$; в) $\frac{2\sqrt{14}}{9}$.

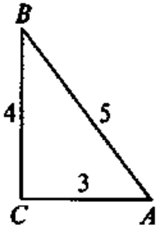



Рис. 11.1

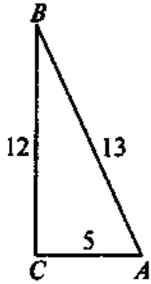



Рис. 11.2

5. Если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, то $\operatorname{tg}\alpha$ равен:

а) $2\sqrt{2}$; б) 8; в) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

6. В треугольнике $ABC$ $\angle C = 90°$, $\sin\angle A = \frac{2}{5}$. Найдите $\sin\angle B$.

а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{\sqrt{21}}{5}$; в) $\frac{21}{25}$.

7. Упростите выражение $\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \operatorname{tg} 60°$.

а) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

***Вариант 2***

Рис. 11.2.

1. Косинус угла $B$ равен:

а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{12}{5}$.

2. Тангенс угла $A$ равен:

а) $\frac{12}{5}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{12}{13}$.

3. Синус 30° равен:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$.

4. Если $\cos\alpha = \frac{4}{7}$, то $\sin\alpha$ равен:

а) $\frac{\sqrt{33}}{97}$; б) $\frac{33}{49}$; в) $\frac{7}{4}$.

5. Если $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, то $\operatorname{tg}\alpha$ равен:

а) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

6. В треугольнике $ABC$ $\angle C = 90°$, $\sin\angle A = \frac{3}{5}$. Найдите $\cos\angle B$.

а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{16}{25}$.

7. Упростите выражение $\cos 60° \cdot \sin 45° \cdot \operatorname{tg} 30°$.

а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

***Ответы к тесту:***

***Вариант 1:*** 1 – а; 2 – в; 3 – б; 4 – в; 5 – а; 6 – б; 7 – а.

***Вариант 2:*** 1 – б; 2 – а; 3 – в; 4 – а; 5 – в; 6 – б; 7 – в.

### IV. Определение темы урока

Работа в группах.

Решить задачу.

В равнобедренном треугольнике $ABC$ $\angle C = 120°$.

Найдите:

а) синус угла $A$;

б) косинус угла $C$.

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

### V. Работа по теме урока

1. Ввести понятия синуса, косинуса, тангенса для углов от 0 до 180°, используя единичную полуокружность (рис. 11.3, 11.4).

$$\sin\alpha = \frac{MM_1}{OM} = \frac{y}{1} = y;\ \sin\alpha = y;\ 0 \le \sin\alpha \le 1.$$

$$\cos\alpha = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{1} = x;\ \cos\alpha = x;\ -1 \le \cos\alpha \le 1.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\alpha \ne 90°).$$

$\Delta OMM_1$ – прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора $OM_1^2 + MM_1^2 = OM^2$; $x^2 + y^2 = 1^2$.

*Основное тригонометрическое тождество:*

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

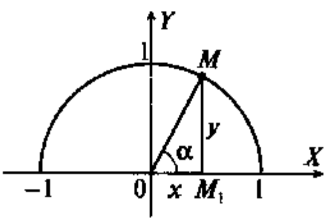


Рис. 11.3

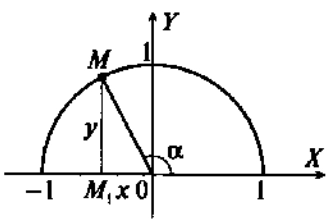


Рис. 11.4

*Формулы приведения:*

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha.$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha.$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$

2. Работа в парах.

Составить таблицу значений синуса, косинуса и тангенса для углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°,150°, 180°.

| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | | | | | | | | | |
| $\cos\alpha$ | | | | | | | | | |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | | | | | | | | | |

(Значения синуса, косинуса, тангенса для углов от 0 до 90° учащиеся знают из курса геометрии 8 класса. Значения синуса, косинуса, тангенса для углов 120°, 135°, 150°, 180° заполняют при консультативной помощи учителя, используя формулы приведения, единичную полуокружность и формулы $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.)

Например:

а) $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\operatorname{tg}150° = \frac{\sin 150°}{\cos 150°} = \frac{1}{2} : (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\sin 180° = 0$ (ордината точки $M$ при повороте радиуса $OM$ на 180° от положительной полуоси $Ox$ равна 0).

3. Вывести формулы для вычисления координат точки (рис. 11.5).

$\overrightarrow{OM}\{\cos\alpha; \sin\alpha\}$.

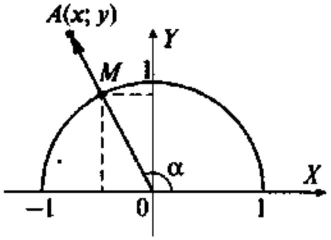



Рис. 11.5

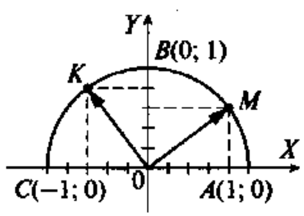



Рис. 11.6

$\overline{OA} = OA \cdot \overline{OM}$.

$x = OA \cdot \cos\alpha$; $y = OA \cdot \sin\alpha$.

$\overline{OA}\{OA\cos\alpha;\ OA\sin\alpha\}$.

**VI. Закрепление изученного материала**

1. Работа в парах.

Разобрать решение задач № 30 (а), 31 (а) (рабочая тетрадь).

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 30 (б, в, г), 31 (б, в) (рабочая тетрадь).

***Задача № 30 (а, б, в, г)***

Найдите по рисунку (рис. 11.6) синус, косинус и тангенс угла:

а) $AOM$; б) $AOK$; в) $AOC$; г) $AOB$.

***Решение:***

а) Угол $AOM$ образован лучом $OM$ и положительной полуосью абсцисс, точка $M$ лежит на единичной полуокружности. Значит, синус угла $AOM$ равен ординате точки $M$, т. е. $\sin\angle AOM = 0{,}6$.

Косинус угла $AOM$ равен абсциссе точки $M$, т. е. $\cos\angle AOM = 0{,}8$.

Тангенс $\angle AOM$ равен $\dfrac{\sin\angle AOM}{\cos\angle AOM}$ т. е. $\operatorname{tg}\angle AOM = AM : OA = \dfrac{3}{4}$.

б) Синус угла $OAK$ равен ординате точки $K$, т. е. $\sin\angle AOK = 0{,}8$. Косинус угла $AOK$ равен абсциссе точки $K$, т. е. $\cos\angle AOK = -0{,}6$.

Тангенс угла $AOK$ равен $\dfrac{\sin\angle AOK}{\cos\angle AOK}$, т. е. $\operatorname{tg}\angle AOK = -\dfrac{4}{3}$.

в) $\sin\angle AOC = 0$; $\cos\angle AOC = -1$; $\operatorname{tg}\angle AOC = 0$.

г) $\sin\angle AOB = 1$; $\cos\angle AOB = 0$; тангенс угла $AOB$ не существует, так как $\cos\angle AOB = 0$.

***Ответ:***

а) $\sin\angle AOM = 0{,}6$; $\cos\angle AOM = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\angle AOM = \dfrac{3}{4}$;

б) $\sin\angle OAK = 0{,}8$; $\cos\angle AOK = -0{,}6$; $\operatorname{tg}\angle AOK = -\dfrac{4}{3}$;

в) $\sin\angle AOC = 0$; $\cos\angle AOC = -1$; $\operatorname{tg}\angle AOC = 0$;

г) $\sin\angle AOB = 1$; $\cos\angle AOB = 0$, $\operatorname{tg}\angle AOB$ не существует.

***Задача № 31 (а, б, в)***

Принадлежит ли единичной полуокружности точка:

а) $P(-0{,}6;\ 0{,}8)$; б) $T\left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{3}{4}\right)$; в) $H\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

***Решение:*** Точка с координатами $(x;\ y)$ принадлежит единичной полуокружности, если выполнены два условия: 1) $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ и 2) $x^2 + y^2 = 1$. Рассмотрим данные точки.

а) Точка $P$.

$x = -0{,}6$, $y = 0{,}8$ удовлетворяют первому условию: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$; $x^2 + y^2 = (-0{,}6)^2 + 0{,}8^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$, следовательно, выполнено второе условие. Поэтому точка $P$ принадлежит единичной полуокружности.

б) Точка $T$.

$x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, следовательно, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. Следовательно, второе условие не выполнено. Поэтому точка $T$ не принадлежит единичной полуокружности.

в) Точка $H$.

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. Первое условие выполнено. $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Второе условие выполнено. Поэтому точка $H$ принадлежит единичной полуокружности.

*Ответ:*

а) принадлежит;

б) не принадлежит;

в) принадлежит.

## VII. Самостоятельное решение задач

Решить задачи № 1012, 1013, 1015 (а, в) (учебник).

***Задача № 1012***

*Решение:* Точка с координатами $(x; y)$ принадлежит единичной полуокружности, если выполняются условия: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ и $x^2 + y^2 = 1$. Точка $M_1(0; 1)$ удовлетворяет всем условиям, следовательно, она лежит на единичной полуокружности.

Точка $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ удовлетворяет всем условиям, следовательно, она лежит на единичной полуокружности.

Точки $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ также лежат на единичной полуокружности.

Синус $\angle AOM$ – это ордината точки $M$. Косинус $\angle AOM$ – это абсцисса точки $M$. Тангенс $\angle AOM$ равен отношению синуса $\angle AOM$ к его косинусу.

$M_1(0; 1) \Rightarrow \sin\angle AOM_1 = 1$, $\cos\angle AOM_1 = 0$, $\operatorname{tg}\angle AOM_1 = 0$.

$$M_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \sin\angle AOM_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\angle AOM_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{tg}\angle AOM_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

$$M_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \sin\angle AOM_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\angle AOM_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{tg}\angle AOM_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

$$M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin\angle AOM_4 = \frac{1}{2},\ \cos\angle AOM_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tg}\angle AOM_4 = \frac{1}{2} : (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

***Задача № 1013***

*Решение:* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, следовательно, $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, но так как $0 \le \sin\alpha \le 1$, то $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, следовательно, $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, следовательно, $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

в) $\cos\alpha = -1$, следовательно, $\sin\alpha = \sqrt{1-1} = 0$.

*Ответ:* а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; в) 0.

***Задача № 1015***

*Решение:*

а) $\cos\alpha = 1$, следовательно, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-1} = 0$.
$\text{tg}\,\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha = 0 : 1 = 0$.

в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $0° < \alpha < 90°$, то $\cos\alpha > 0$, следовательно, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

*Ответ*: а) 0; в) 1.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

### VIII. Рефлексия учебной деятельности

1. Что называют синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом угла?
2. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
3. Запишите формулы приведения.

### Домашнее задание

1. П. 97–99, вопросы 1–6 (учебник, с. 266).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1011, 1014, 1015 (б, г) (учебник), № 32 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1011, 1014, 1015 (б, г), дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

Точка $B$ единичной полуокружности имеет координаты: а) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Найдите угол, который образует луч $OB$ с положительной полуосью $Ox$.

## Урок 26. Синус, косинус и тангенс угла

***Основные дидактические цели урока:*** совершенствовать навыки нахождения синуса, косинуса и тангенса для углов от 0 до 180°; развивать умение пользоваться основным тригонометрическим тождеством и находить координаты точки.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос по вопросам 1–6 учебника.
2. Решение задач на повторение (дифференцированная работа).

а) Индивидуальная работа по решению задачи № 33 из рабочей тетради (I уровень сложности).

б) Индивидуальная работа по карточкам.

в) Самостоятельное решение дополнительных задач № 1, 2 (II уровень сложности).

***Задача № 33***

Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

*Решение:*

1) Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получаем $\sin^2\alpha + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$. Откуда $\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$. Так как $-1 \le \sin\alpha \le 1$, то $\sin\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$.

2) По определению $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{1}{2} : \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

*Ответ:* $\sin\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**I уровень сложности**

1. Выясните, принадлежат ли единичной полуокружности точки $A\left(-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)$, $D\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

2. Найдите синус, косинус, тангенс углов $AOB$ и $AOC$, если $A(1;\ 0)$, $B\left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$, $C\left(-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O$ – начало координат.

3. Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$;

б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $90° < \alpha < 180°$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

**II уровень сложности**

1. Найдите угол $BOC$, если $O$ – начало координат, а координаты точек равны $B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$;

б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{7}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{8}$.

3. Вычислите синусы, косинусы и тангенсы углов 45° и 120°.

**III уровень сложности**

1. Найдите координаты точки $C$, если известно, что $\angle BOC = 60°$, $O$ – начало координат, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а точка $C$ лежит на единичной полуокружности.

2. Найдите:

а) $\operatorname{tg}\alpha : \cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;

б) $\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$;

в) $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$.

3. Найдите значение выражения $\sin 150° \cdot \cos^2 60° \cdot \operatorname{tg} 30°$.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1***

Вычислите:

а) $(\cos 135°)^2 - \sin 150°$;

б) $\operatorname{tg} 260° + \operatorname{tg} 430°$;

в) $\sin 120° \cdot \cos 150° \cdot \operatorname{tg} 135° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \sin^2 45°$.

***Задача 2***

Найдите угол $COD$, если точка $C$ лежит на положительной полуоси $Oy$, а точка $D$ имеет координаты $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**III. Решение задач**

1. Работа в малых группах.

Решить задачи № 1017 (б), 1018 (а) с последующим обсуждением.

***Задача № 1017 (б)***

*Решение:* Так как косинус угла – это отношение прилежащего катета к гипотенузе и $\cos A = \frac{3}{4}$, то для построения $\angle A$ нужно построить прямоугольный $\Delta ABC$, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 3$, $AB = 4$ (рис. 11.7).

Наводящие вопросы.

– Что называют косинусом угла прямоугольного треугольника?
– Пусть мы имеем прямоугольный треугольник $ABC$, в котором $\angle C = 90°$, $\cos\angle A = \frac{3}{4}$. Что можно сказать о сторонах этого треугольника?

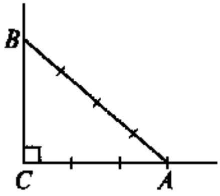


**Рис. 11.7**

– Как построить прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза равна четырем единичным отрезкам, а один из его катетов – трем единичным отрезкам?
– Укажите угол, косинус которого равен $\frac{3}{4}$.

***Задача № 1018 (а, в, д)***

*Решение:* Если точка $A$ имеет координаты $(x;\ y)$, то $x = OA \cdot \cos\alpha$, а $y = OA \cdot \sin\alpha$.

а) $OA = 3$, $\alpha = 45°$, отсюда $x = 3 \cdot \cos 45° = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $y = 3 \cdot \sin 45° = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

в) $OA = 5$, $\alpha = 150°$, отсюда $x = 3 \cdot \cos 150° = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$; $y = 5 \cdot \sin 150° = \frac{5}{2}$, следовательно, $A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2};\ \frac{5}{2}\right)$.

д) $OA = 2$; $\alpha = 30°$, отсюда $x = 2 \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$; $y = 2 \cdot \sin 30° = 1$, следовательно, $A(\sqrt{3};\ 1)$.

*Ответ:* а) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2};\ \frac{5}{2}\right)$; д) $A(\sqrt{3};\ 1)$.

3. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой. (Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задачи № 1018 (в, д), 1019 (б, г) (учебник), № 37 (рабочая тетрадь).

*II уровень сложности:* задачи № 1018 (в, д), 1019 (б, г), дополнительные задачи № 3, 4.

***Задача № 1019 (б, г)***

*Решение:* Координаты точки $A$ можно вычеслить по формулам $x = OA \cdot \cos\alpha$, $y = OA \cdot \sin\alpha$.

В прямоугольной системе координат $xOy$ для координат точки $A$ выполняется равенство $x^2 + y^2 = OA^2$.

б) $A(0; 3)$, тогда $0^2 + 3^2 = OA^2 \Rightarrow OA = 3$. Отсюда по формуле $x = OA \cdot \cos\alpha$ получаем $0 = 3 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$.

г) $A(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \Rightarrow (-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = OA^2$, тогда $OA^2 = 16x \Rightarrow OA = 4$. Отсюда по формуле $x = OA \cdot \cos\alpha$ получаем $-2\sqrt{2} = 4 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135°$.

*Ответ:* б) 90°; г) 135°.

***Дополнительные задачи***

***Задача 3***

Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $|\cos\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{7}$.

***Задача 4***

Постройте угол $A$, если:

а) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{7}$.

***Критерии оценивания:***

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

## IV. Рефлексия учебной деятельности

Как найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла, вершина которого совпадает с началом координат, а одна из сторон совпадает с полуосью абсцисс?

## Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 1017 (а; в), 1018 (б; г), 1019 (а; в) (учебник), № 34 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1017 (а; в), 1018 (б; г), 1019 (а; в), дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

Найдите координаты вершин треугольника, если известно, что они лежат на единичной полуокружности, а его углы относятся как 1 : 2 : 3.

# Урок 27. Синус, косинус и тангенс угла

***Основные дидактические цели урока:*** совершенствовать умение находить синусы, косинусы, тангенсы для углов от 0 до 180°; применять основное тригонометрическое тождество и вычеслять координаты точки.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Решение задач по готовым чертежам

1. Рис. 11.8. *Найти:* $x$; $y$.
2. Рис. 11.9. *Найти:* $\angle COA$, $\angle COB$.
3. Рис. 11.10. *Найти:* $\angle COD$.
4. Рис. 11.11. *Найти:* $\alpha$, $\beta$.
5. Рис. 11.12. *Найти:* Координаты точек $A$ и $B$.
6. Рис. 11.13. *Найти:* $S_{ABO}$.

*Ответы к задачам по готовым чертежам:*

1. $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\angle COA = 30°$, $\angle COB = 120°$.
3. $\angle COD = 105°$.

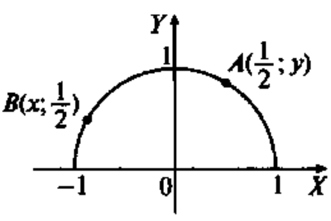



Рис. 11.8

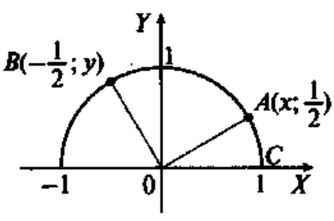



Рис. 11.9

4. $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

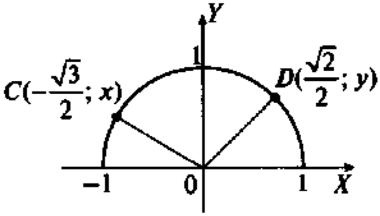



Рис. 11.10

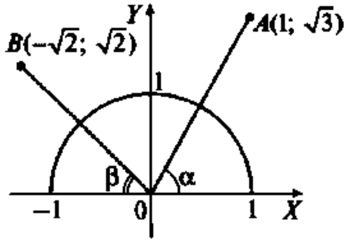



Рис. 11.11

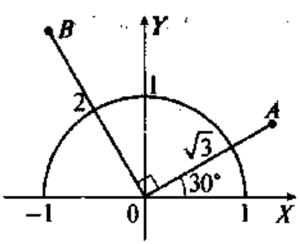



Рис. 11.12

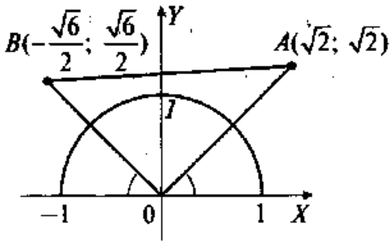



Рис. 11.13

5. $A\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-1; \sqrt{3}\right)$.

6. $S_{ABO} = \sqrt{3}$ кв. ед.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка. Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены три задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее трех задач.

**III. Проверка домашнего задания**

(Учитель проверяет решение домашних задач индивидуально у нескольких учеников, пока класс решает задачи по готовым чертежам.)

***Задача № 1017 (а, в)*** (рис. 11.14)

*Решение:*

а) $\sin A = \dfrac{2}{3}$.

в) $\cos A = -\dfrac{2}{5}$.

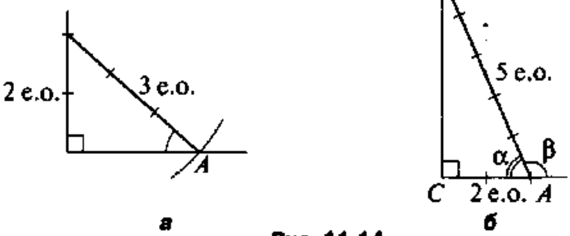



Рис. 11.14

***Задача № 1018 (б, г)***

*Решение:* $x = OA \cdot \cos\alpha$; $y = OA \cdot \sin\alpha$.

б) $OA = 1{,}5$; $\alpha = 90° \Rightarrow x = 1{,}5 \cdot \cos 90°$; $y = 1{,}5 \cdot \sin 90° = 1{,}5 \Rightarrow A(0;\ 1{,}5)$.

г) $OA = 1$; $\alpha = 180° \Rightarrow x = 1 \cdot \cos 180° = -1$; $y = 1 \cdot \sin 180° = 0 \Rightarrow A(-1;\ 0)$.

*Ответ:* б) $A(0;\ 1{,}5)$, г) $A(-1;\ 0)$.

***Задача № 1019 (а, в)***

*Решение:*

а) $A(2;\ 2) \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + 4 = 8 = OA^2 \Rightarrow OA = 2\sqrt{2}$.

По формуле $x = OA \cdot \cos\alpha$ имеем $2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$.

в) $A(-\sqrt{3};\ 1) \Rightarrow x^2 + y^2 = (-\sqrt{3})^2 + 1 = 4 = OA^2 \Rightarrow OA = 2$.

По формуле $x = OA \cdot \cos\alpha$ имеем $-\sqrt{3} = 2 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150°$.

*Ответ:* а) 45°; в) 150°.

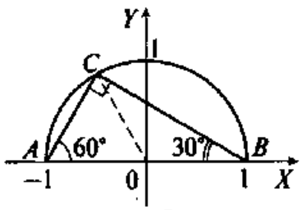
***Дополнительная задача***

*Решение:* Так как в $\Delta ABC$ $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$.

Так как прямой угол опирается на диаметр, то возможны два случая.

*Первый случай:* $\Delta ACO$ — равносторонний $\Rightarrow \angle AOC = 60° \Rightarrow \angle BOC = 120° \Rightarrow C(\cos 120°;\ \sin 120°)$, т. е. $C\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$ (рис. 11.15, а).

*Второй случай:* $\Delta BCO$ — равносторонний $\Rightarrow \angle BOC = 60° \Rightarrow C(\cos 60°;\ \sin 60°)$, т. е. $C\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$ (рис. 11.15, б).



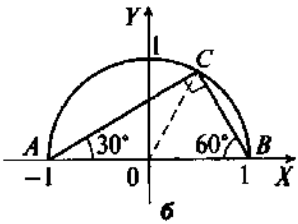




**Рис. 11.15**

*Ответ:* $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$ или $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$.

## IV. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$;

б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{5}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

2. Проверьте, лежат ли на единичной окружности точки:

а) $A\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$; б) $B(7; 3)$; в) $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

3. Угол между лучом $OM$, пересекающим единичную полуокружность, и положительной полуосью $Ox$ равен $\alpha$. Найдите координаты точки $M$, если:

а) $OM = 4$; $\alpha = 60°$;

б) $OM = 8$; $\alpha = 150°$.

***Вариант 2***

1. Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$;

б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Проверьте, лежат ли на единичной окружности точки:

а) $A\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; б) $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $C(2; 3)$.

3. Угол между лучом $OP$, пересекающим единичную полуокружность, и положительной полуосью $Ox$ равен $\beta$. Найдите координаты точки $P$, если:

а) $OP = 6$; $\beta = 30°$;

б) $OP = 10$; $\beta = 120°$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Найдите синус, косинус и тангенс угла $AOM$, если $O$ – начало координат, а точки $A(1; 0)$, $M\left(-\frac{1}{5}; y\right)$ лежат на единичной полуокружности.

2. Упростите выражение:

а) $\sin 60° \cdot \cos 135° \cdot \operatorname{tg} 120°$;

б) $\cos 60° - 2\sin^2 135° + \cos^2 150°$.

3. Найдите угол между лучом $OM$ и положительной полуосью $Ox$, если точка $M$ имеет координаты:

а) $(-4; 4)$; б) $(3\sqrt{3}; 3)$.

***Вариант 2***

1. Найдите синус, косинус и тангенс угла $BOP$, если $O$ – начало координат, а точки $B(1; 0)$ и $P\left(-\frac{3}{4}; y\right)$ лежат на единичной полуокружности.

2. Упростите выражение:

а) $\cos 180° \cdot \sin 120° \cdot \operatorname{tg} 135°$;

б) $\cos 45° - \sin^2 150° + \cos 120°$.

3. Найдите угол между лучом $OP$ и положительной полуосью $Ox$, если точка $P$ имеет координаты:

а) $(-2; 2\sqrt{3})$; б) $(3\sqrt{3}; 3)$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Постройте угол $A$, если $\cos\angle A = -\frac{4}{7}$. Найдите $\sin\angle A$, $\operatorname{tg}\angle A$.

2. Найдите значение выражения $\sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - \cos^2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

3. Найдите наименьший угол между лучами $OA$ и $OB$, если $A(-2; 2\sqrt{3})$, $B(5; 5)$, $O$ – начало координат.

***Вариант 2***

1. Постройте угол $B$, если $\cos\angle B = -\frac{5}{8}$. Найдите $\sin\angle B$, $\operatorname{tg}\angle B$.

2. Найдите значение выражения $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

3. Найдите наименьший угол между лучами $OC$ и $OD$, если $C(-3\sqrt{3};\ 3)$, $D(7;\ 7)$, $O$ – начало координат.

***Ответы к задачам самостоятельной работы:***

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. а) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}$; в) $\sqrt{3}$.
2. а) Да; б) Нет; в) Нет.
3. а) $M(2;\ 2\sqrt{3})$; б) $M(-4\sqrt{3};\ 4)$.

***Вариант 2***

1. а) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$; б) $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
2. а) Да; б) Нет; в) Нет.
3. а) $P(3\sqrt{3};\ 3)$; б) $P(-5\sqrt{3};\ 5)$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $\cos\alpha = -\dfrac{1}{5}$; $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = -2\sqrt{6}$.
2. а) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\dfrac{1}{4}$.
3. а) 135°; б) 30°.

***Вариант 2***

1. $\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$; $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.
2. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\dfrac{1}{4}$.
3. а) 120°; б) 45°.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $\sin\angle A = \dfrac{\sqrt{33}}{7}$; $\mathrm{tg}\,\angle A = -\dfrac{\sqrt{33}}{4}$.
2. $-\dfrac{7}{8}$.
3. 75°.

***Вариант 2***

1. $\sin\angle B = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$; $\mathrm{tg}\,\angle B = -\dfrac{\sqrt{39}}{5}$.

2. $\frac{1}{5}$.

3. 105°.

### V. Рефлексия учебной деятельности

1. Выполнить работу над ошибками, используя готовые ответы.
2. Разобрать задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 35 (рабочая тетрадь), задачи II или III уровня сложности самостоятельной работы (на усмотрение учителя); II уровень сложности: задачи III уровня сложности самостоятельной работы.

## Урок 28. Теорема о площади треугольника

***Основные дидактические цели урока:*** доказать теорему о площади треугольника; научить учащихся решать задачи на применение теоремы о площади треугольника.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

### III. Актуализация знаний учащихся. Повторение теории

Фронтальная работа с классом.

Выполнить задания № 1, 2.

***Задание 1.*** Какие формулы используются для вычисления координат точки $A$ (рис. 11.16)?

*Ответ:* $x = OA \cdot \cos\alpha$; $y = OA \cdot \sin\alpha$.

***Задание 2.*** Какие формулы используются для вычисления площади: а) треугольника; б) параллелограмма?

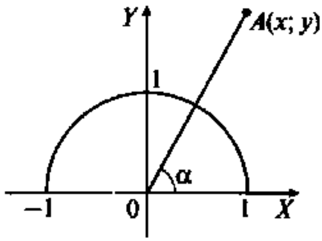



**Рис. 11.16**

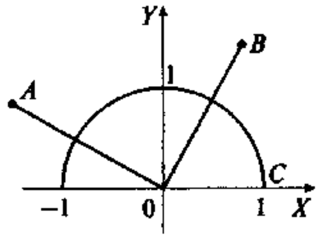



**Рис. 11.17**

*Ответ:*

а) $S\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, где $h_a$ – высота, проведенная к стороне $a$; для прямоугольного треугольника $S\Delta = \frac{1}{2}ab$, где $a$ и $b$ – катеты; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника, $p$ – полупериметр (формула Герона).

б) $S_{\text{парал-ма}} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, где $h_a$ – высота, проведенная к стороне $a$.

## IV. Определение темы урока

Работа в парах.

Решить задачи с последующим обсуждением.

***Задача 1.*** Вычислите координаты точек $A$ и $B$, если $OA = 2$, $OB = \sqrt{3}$, $\angle BOC = 60°$, $OB \perp OA$ (рис. 11.17).

*Ответ:* $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$; $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

***Задача 2.*** Вычислите площадь треугольников, изображенных на рисунке (рис. 11.18).

*Ответ:* а) 6; б) $6\sqrt{6}$; в) $16\sqrt{6}$; г) 20; д) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

(Учитель должен уделить особое внимание решению задачи № 2 *д*.)

Вопросы для обсуждения задачи № 2 *д*.

– Какая формула используется для вычисления площади треугольника?
– Как, используя данные задачи, можно найти высоту, проведенную к стороне $OB$?
– Если $AH$ – высота треугольника $OAB$, то что можно сказать о треугольнике $OAH$?
– Каким соотношением связаны в треугольнике $OAH$ гипотенуза $OA$, угол $AOH$ и противолежащий ему катет $AH$?

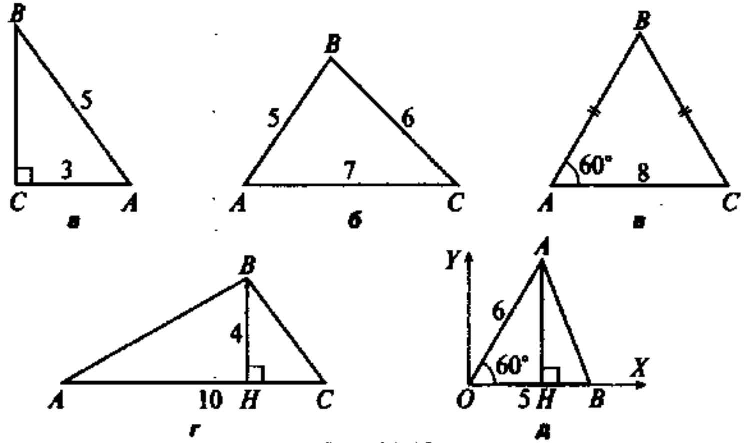



Рис. 11.18

– Чему равна высота $AH$?

– Вычислите площадь треугольника $OAB$.

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

**V. Работа по теме урока**

Работа в группах.

Вывод формулы о площади треугольника с последующим обсуждением всех вариантов решений.

***Задача.*** В $\Delta ABC$ $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \alpha$.

Найдите площадь треугольника (рис. 11.19).

*Решение:* Координаты точки $B$ равны: $x = a \cdot \cos\alpha$, $y = a \cdot \sin\alpha$.

Высота $\Delta ABC$, проведенная к стороне $AC$, равна $BH$. С другой стороны, $BH$ – это ордината точки $B$, т. е. $BH = a \cdot \sin\alpha$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}b \cdot (a \cdot \sin\alpha) = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\alpha$. Итак, $S\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, где $a$, $b$ – стороны треугольника, $\alpha$ – угол между ними.

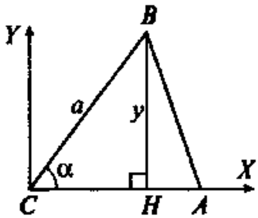



Рис. 11.19

Наводящие вопросы для групп, у которых решение задачи вызвало затруднения.

– Для чего проведена высота $\Delta ABC$?

– Почему координаты точки $B$ равны $(a \cdot \cos\alpha;\ a \cdot \sin\alpha)$?

– Почему $BH = a \cdot \sin\alpha$?

– Где расположен угол $\alpha$ по отношению к сторонам $a$ и $b$ треугольника в формуле $S\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$?

**VI. Закрепление изученного материала**

1. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 38, 39 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

Вопросы для обсуждения задачи № 38.

– Лежит ли угол *B* между сторонами *AB* и *BC* треугольника *ABC*?
– Какую формулу вы использовали для вычисления площади треугольника *ABC*?
– Можно ли площадь треугольника *ABC* вычислить другим способом?
– Какой из этих способов наиболее рациональный?

Вопросы для обсуждения задачи № 39.

– Какая зависимость существует между площадью треугольника, двумя его сторонами и углом, заключенным между этими сторонами?
– Объясните, почему в данной задаче $S\Delta = BE^2 \sin\angle E$.

2. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

*I уровень сложности:* задачи № 1020 (а), 1022, дополнительные задачи № 1, 2.

*II уровень сложности:* задачи № 1022, 1024, дополнительные задачи № 1, 2.

***Задача № 1020 (а)***

*Решение:* $AB = 6\sqrt{8}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60°$, тогда

$$S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{8} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{6} \text{ см}^2.$$

*Ответ:* $12\sqrt{6}$ см$^2$.

***Задача № 1022***

*Решение:* $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$. $S_{ABC} = 60$ см$^2$, $AC = 15$ см,

$$\angle A = 30° \Rightarrow AB = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot \sin\angle A} = 16 \text{ см}.$$

*Ответ:* 16 см.

***Задача № 1024*** (рис. 11.20)

*Решение:*

а) Из $\Delta ABM$ $\sin\alpha = BM : AB$, отсюда $AB = \dfrac{h_b}{\sin\alpha}$.

Из $\Delta AKC$ $\sin\alpha = KC : AC \Rightarrow AC = \dfrac{h_c}{\sin\alpha}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_b}{\sin\alpha} \cdot \frac{h_c}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha}.$$

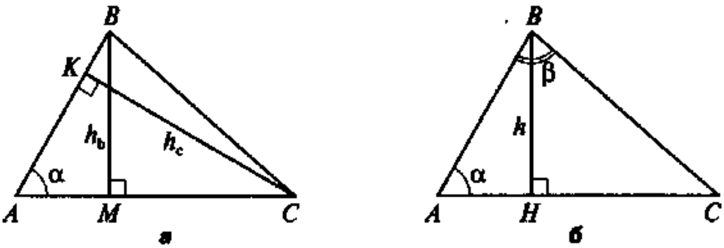



Рис. 11.20

б) Из прямоугольного $\Delta ABH$ $\sin\alpha = \dfrac{BH}{AB}$, отсюда $AB = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

В прямоугольном $\Delta CBH$ $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (\alpha + \beta)$, отсюда $\sin\angle C = \sin(180° - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$.

$\sin\angle C = BH : BC$, отсюда $BC = h : \sin(\alpha + \beta)$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \frac{h}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sin\beta =$$

$$= \frac{h^2}{2\sin\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)}.$$

*Ответ:* а) $\dfrac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha}$; б) $\dfrac{h^2}{2\sin\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)}$.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом при основании 15° и боковой стороной, равной 5 см.

*Решение:* $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$, $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) =$ $= 150°$ (рис. 11.21).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{4}\text{ см}^2.$$

*Ответ:* $\dfrac{25}{4}$ см$^2$.

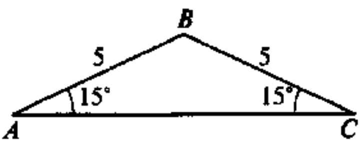



Рис. 11.21

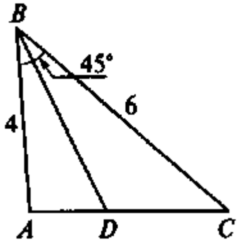



Рис. 11.22

***Задача 2.*** **В $\Delta ABC$ $AB = 4$, $BC = 6$, $BD$ – биссектриса, $\angle ABC = 45°$. Найдите площади треугольников $ABD$ и $CBD$.**

***Решение:***

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ (рис. 11.22).}$$

$BD$ – биссектриса $\Delta ABC$, тогда

$$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin\frac{45°}{2}}{BC \cdot BD \cdot \sin\frac{45°}{2}} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}.$$

Так как $S_{ABC} = 6\sqrt{2} = S_{ABD} + S_{CBD}$, $\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{2}{3}$, то $\Rightarrow$

$$S_{ABD} = \frac{12\sqrt{2}}{5};\ S_{CBD} = \frac{18\sqrt{2}}{5}.$$

*Ответ:* $S_{ABD} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$; $S_{CBD} = \frac{18\sqrt{2}}{5}$.

***Задача 3.*** В треугольнике $MNK$ $MK = 12$, $NK = 16$, $\angle K = \alpha$, $MM_1$ и $NN_1$ – медианы, пересекающиеся в точке $O$. Найдите площадь четырехугольника $N_1OM_1K$.

*Решение:* Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих (равных по площади) треугольников (рис. 11.23). Так как медианы $NN_1$ и $MM_1$ пересекаются в точке $O$, то $KO$ также является медианой, то $S_{N_1OM_1K} = 2 \cdot S_{N_1OK} = 2 \cdot \frac{1}{6}S_{MNK}$.

$S_{MNK} = \frac{1}{2}KM \cdot KN \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 \cdot \sin\alpha = 96\sin\alpha$, следовательно, $S_{N_1OM_1K} = \frac{1}{3} \cdot 96\sin\alpha = 32\sin\alpha$.

*Ответ:* $32\sin\alpha$.

***Задача 4***

В треугольнике $ABC$ медианы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $O$, $AA_1 = CC_1 = 18$ см, $\angle AOC_1 = 60°$. Найдите площадь $\Delta ABC$.

*Решение:* Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины (рис. 11.24).

Так как $AA_1 = 15$ см, $CC_1 = 18$ см, то $AO = \frac{2}{3}AA_1 = 10$ см, $C_1O = \frac{1}{3}CC_1 = 6$ см.

$$S_{AOC_1} = \frac{1}{2}OC_1 \cdot OA \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

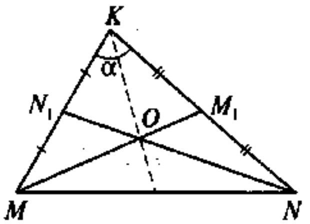



Рис. 11.23

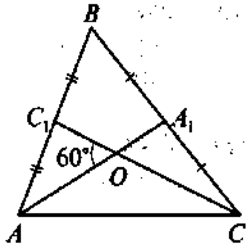



Рис. 11.24

$S_{ABC} = 6 \cdot S_{AOC_1} = 90\sqrt{3}$ см$^2$.

*Ответ:* $90\sqrt{3}$ см$^2$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

**VII. Рефлексия учебной деятельности**

По каким формулам можно вычислить площадь треугольника?

**Домашнее задание**

1. П. 100, вопрос 7 (учебник, с. 266).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1020 (б, в), 1021, 1023 (учебник), № 40 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1021, 1023, дополнительные задачи № 3, 4.

## Урок 29. Теоремы синусов и косинусов

***Основные дидактические цели урока:*** доказать теоремы синусов и косинусов и показать их применение при решении задач; закрепить теорему о площади треугольника; совершенствовать навыки решения задач на ее применение.

### Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Теоретический опрос.

(Наиболее подготовленный ученик готовит доказательство теоремы о площади треугольника у доски. Заслушать после проверки домашнего задания.)

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 40 (рабочая тетрадь), № 1023; дополнительных задач № 3, 4 индивидуально у нескольких учеников.)

***Задача № 40***

*Решение:* Углы параллелограмма равны 60 и 120°.

$S = 4 \cdot 6 \cdot \sin 60° = 24 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ м².

*Ответ:* $12\sqrt{3}$ м².

***Задача № 1023***

*Решение:* Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, т. е. $OC = OD = OB = OA$ (рис. 11.25).

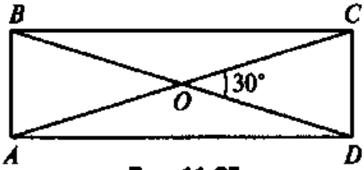



**Рис. 11.25**

$S_{OCD} = S_{AOB} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\angle COD.$

$\angle BOC = 180° - \angle COD$, тогда $\sin\angle BOC = \sin(180° - \angle COD) = \sin\angle COD$.

$S_{BOC} = S_{AOD} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\angle COD$, следовательно, $S_{OCD} = S_{AOB} = S_{BOC} = S_{AOD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\angle COD.$

Обозначим диагональ прямоугольника через $d$, получим $S_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot d\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot d\right) \cdot \sin\alpha$ (где $\alpha$ — угол между диагоналями), т. е. $S_{OCD} = \frac{1}{8} d^2 \sin\alpha \Rightarrow S_{\text{прям-ка}} = 4 \cdot \frac{1}{8} d^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha.$

Итак, $S_{\text{прям-ка}} = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha.$

Если $d = 10$ см, $\alpha = 30°$, то $S_{\text{прям-ка}} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{2} = 25$ см².

*Ответ:* 25 см².

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проведения теоретического опроса.)

**I уровень сложности**

1. В треугольнике $MNK$ $\angle MNK = 150°$, $MN = 8$, а площадь треугольника равна 20. Найдите $NK$.

2. В параллелограмме один из углов равен 45°, а его стороны равны 5 см и 8 см. Найдите площадь параллелограмма.

3. В прямоугольнике диагональ равна 12 см, а угол между диагоналями 30°. Найдите площадь прямоугольника.

**II уровень сложности**

1. Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали равны 8 см и 12 см, а угол между ними равен 45°.

2. В треугольнике $MNK$ $\angle N = 150°$, $MN = 4$ см, $NK = 6$ см, $NE$ – биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольников $MNE$ и $NKE$.

3. Медианы $\Delta ABC$ пересекаются в точке $O$, $\angle ABC = 30°$, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см. Найдите произведение площадей треугольников $AOC$, $BOC$, $BOA$.

**III уровень сложности**

1. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность так, что основание $AD$ – диаметр окружности. Диагональ трапеции равна 16 см, а ее площадь – 64 см$^2$. Найдите углы трапеции.

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $AD$ равно 8 см, диагональ $BD$ перпендикулярна боковой стороне $AB$, а угол при основании $AD$ равен 60°. Найдите площадь трапеции.

3. В треугольнике $MNK$ медианы $MM_1$ и $KK_1$ пересекаются в точке $O$, $MM_1 = 4{,}5$, $KK_1 = 6$. Найдите угол $MOK$, если известно, что площадь треугольника $MNK$ равна 9.

## III. Самостоятельное решение задач по готовым чертежам

Решить задачи по готовым чертежам с последующей самопроверкой и обсуждением.

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

При обсуждении задач обратить внимание на следующие формулы:

$S_{\text{парал-ма}} = ab\sin\alpha$, где $a$, $b$ – стороны параллелограмма, $\alpha$ – угол между ними.

$S_{\text{прям-ка}} = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$, где $d$ – диагональ прямоугольника, $\alpha$ – угол между диагоналями.

$S_{\text{парал-ма}} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где $d_1$ и $d_2$ – диагонали параллелограмма, $\alpha$ – угол между ними.

1. Рис. 11.26.

*Найти:* $S$.

2. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм. $BD = 6$, $AC = 10$ (рис. 11.27).

*Найти:* $S$.

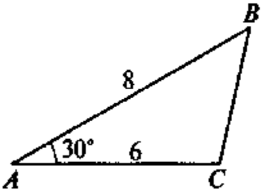



Рис. 11.26

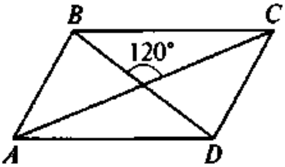



Рис. 11.27

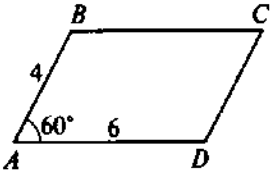



Рис. 11.28

3. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 11.28).
*Найти:* $S$.
4. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник. $AC = 12$ (рис. 11.29).
*Найти:* $S$.
5. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник. $BD = 10$, $BC = 5\sqrt{3}$ (рис. 11.30).
*Найти:* $CD$.
6. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 11.31).
*Найти:* Высоты параллелограмма.
7. *Дано:* $BC = 2\sqrt{7}$ (рис. 11.32).
*Найти:* $AH$.
8. *Дано:* $\angle ABC = 45°$ (рис. 11.33).
*Найти:* $S_{ABD}$, $S_{BDC}$.
9. *Дано:* $AB = 10$, $AC = 14$ (рис. 11.34).
*Найти:* $S_{BOC}$.
***Ответы к задачам по готовым чертежам:***
1. $S = 24$. 2. $S = 15\sqrt{3}$. 3. $S = 12\sqrt{3}$. 4. $S = 36\sqrt{2}$. 5. $CD = 5$. 6. $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. 7. $AH = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 8. $S_{ABD} = \frac{50\sqrt{2}}{13}$; $S_{BDC} = \frac{80\sqrt{2}}{13}$. 9. $S_{BOC} = \frac{35\sqrt{3}}{3}$.

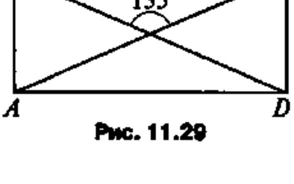



Рис. 11.29

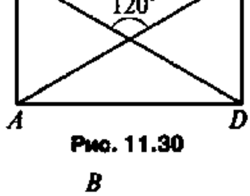



Рис. 11.30

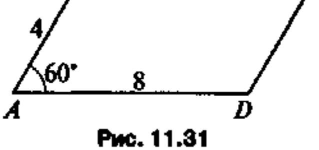



Рис. 11.31

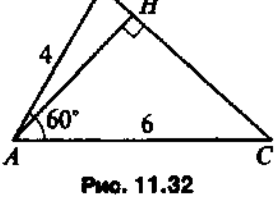



Рис. 11.32

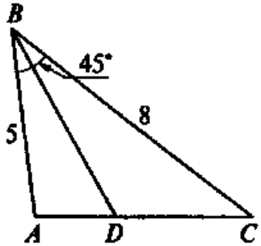



Рис. 11.33

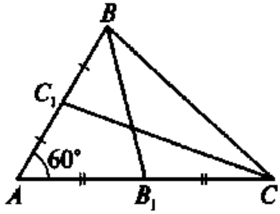



Рис. 11.34

*Критерии оценивания:*
- оценка «5» – правильно решены 8–9 задач;
- оценка «4» – правильно решены 5–7 задач;
- оценка «3» – правильно решены 3–4 задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее 3 задач.

**IV. Работа по теме урока**

1. Сформулировать и доказать теорему синусов (П. 101 учебника).

***Теорема:*** Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

*Дано:* $\Delta ABC$.

*Доказать:* $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$.

(Доказательство проводится в виде беседы учителя с учащимися.)

– Какая формула выражает зависимость между сторонами треугольника и синусами его углов?

*Ответ:* Формула для вычисления площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B. \ (1)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin C. \ (2)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A. \ (3)$$

Приравняем равенства (1) и (2).

– Чему равно отношение $\dfrac{AB}{\sin C}$?

*Ответ:* $\dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin C.$

$AB \cdot \sin B = AC \cdot BC \cdot \sin C.$

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$. (4)

— Как можно получить равенство $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$?

*Ответ:* Приравняем равенства (2) и (3).

$\frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A$.

$BC \cdot \sin C = AB \cdot \sin A$.

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$. (5)

— Верно ли равенство $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$? Почему?

*Ответ:* Равенство верно, это следует из равенств (4) и (5).

2. Сформулировать и доказать теорему косинусов (П. 102 учебника).

Очень часто в треугольнике известны две стороны и угол между ними, и необходимо найти третью его сторону. Справиться с этой задачей нам позволяет теорема косинусов.

***Теорема:*** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

*Дано:* $\Delta ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

*Доказать:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

(Доказательство проводится в виде беседы учителя с учащимися.)

— Поместим $\Delta ABC$ в прямоугольную систему координат так, чтобы точка $A$ совпадала с началом координат, точка $B$ лежала на положительной полуоси $Ox$, а точка $C$ располагалась в первой координатной четверти (рис. 11.35). Чему равны координаты вершин $B$ и $C$ треугольника?

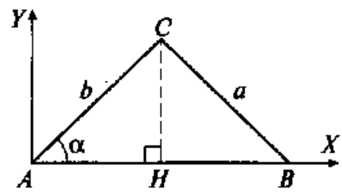


Рис. 11.35

*Ответ:* Так как $AB = c$ и точка $B$ лежит на положительной полуоси $Ox$, то $B(c; 0)$. Если из точки $C$ опустить перпендикуляр $CH$, то $\sin\alpha = \frac{CH}{AC}$, $\cos\alpha = \frac{AH}{AC}$, т. е. $CH = AC\sin\alpha = b\sin\alpha$, $AH = AC\cos\alpha = b\cos\alpha$.

Но $CH$ – это ордината точки $C$, $AH$ – абсцисса точки $C$, поэтому $C(b\cos\alpha;\ b\sin\alpha)$.

– Чему равно расстояние между точками $B$ и $C$, если $B(c;\ 0)$, $C(b\cos\alpha;\ b\sin\alpha)$?

*Ответ:* $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + (b\sin\alpha - 0)^2 = b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2\sin^2\alpha = b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, т. е. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

**V. Закрепление изученного материала**

1. Самостоятельное решение задач.

1) Запишите теорему синусов для треугольника $MNK$.

*Ответ:* $\dfrac{MN}{\sin K} = \dfrac{NK}{\sin M} = \dfrac{MK}{\sin N}$.

2) Запишите теорему косинусов для вычисления стороны:

а) $AB$ в треугольнике $ABC$;

б) $CE$ в треугольнике $CDE$.

*Ответ:* а) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C$; б) $CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot DE \cdot \cos D$.

2. Работа в парах.

Разобрать решение задач № 41, 44 (рабочая тетрадь) с последующей проверкой.

Вопросы для обсуждения к задаче № 41.

– Какая сторона лежит против угла $A$? Какой угол лежит против стороны $AC$?
– Используя свойства пропорций, выразите отрезок $BC$ и найдите его величину.

*Ответ:* $BC = 2$ см.

Вопросы для обсуждения к задаче № 44.

– Как запишется теорема косинусов для вычисления стороны $AB$ треугольника $AOB$?
– Чему равен угол $BOC$? Почему?
– Как вычислить косинус 120°?
– Чему равен периметр параллелограмма?

*Ответ:* $P = 6 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{7})$ см.

3. Самостоятельное решение задач.

Решить задачу № 1025 (а, в, г, е, и).

***Задача № 1025 (а, в, г, е, и)***

*Решение:*

а) $\angle A = 60°$, $\angle B = 40°$, $c = 14$. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 80°$ (рис. 11.36).

По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

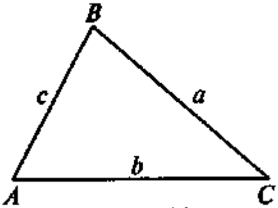


Рис. 11.36

$$\frac{a}{\sin 60°} = \frac{b}{\sin 40°} = \frac{14}{\sin 80°} \Rightarrow$$

$$a = \frac{14 \cdot \sin 60°}{\sin 80°} \approx 12{,}3;\ b = \frac{14 \cdot \sin 40°}{\sin 80°} \approx 9{,}1.$$

в) $\angle A = 80°$, $a = 16$, $b = 10$.

По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$\dfrac{16}{\sin 80°} = \dfrac{10}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. $\sin B = \dfrac{10 \cdot \sin 80°}{16} \approx 0{,}6155 \Rightarrow \angle B \approx$ $\approx 37°59'$.

$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) \approx 62°01'$.

г) $\angle B = 45°$, $\angle C = 70°$, $a = 24{,}6$. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 65°$.

По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

$\dfrac{24{,}6}{\sin 65°} = \dfrac{b}{\sin 45°} = \dfrac{c}{\sin 70°}$. $c = \dfrac{24{,}6 \cdot \sin 70°}{\sin 65°} \approx 25{,}5;$

$$b = \frac{24{,}6 \cdot \sin 45°}{\sin 65°} \approx 19{,}2.$$

е) $a = 6{,}3$; $b = 6{,}3$; $\angle C = 54°$.

По теореме косинусов $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos A = 6{,}3^2 + 6{,}3^2 -$ $- 2 \cdot 6{,}3 \cdot 6{,}3 \cdot \cos 54° = 2 \cdot 6{,}3^2(1 - \cos 54°) \Rightarrow c \approx 5{,}7.$

По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$\dfrac{6{,}3}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin 70°} = \dfrac{5{,}7}{\sin 54°} \Rightarrow \sin A = \sin B = \dfrac{6{,}3 \cdot \sin 54°}{5{,}7} \Rightarrow \angle A =$ $= \angle B \approx 63°$.

и) $a = 6$; $b = 7{,}3$; $c = 4{,}8$.

По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

$$\cos A = \frac{7{,}3^2 + 4{,}8^2 - 6^2}{2 \cdot 7{,}3 \cdot 4{,}8} \approx 0{,}5755 \Rightarrow \angle A = 54°52'.$$

По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$.

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{7{,}3 \cdot 0{,}8174}{6} \approx 0{,}9950 \Rightarrow \angle B = 84°16'.$$

$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 40°52'$.

*Ответ:* а) $\angle C = 80°$; $a \approx 12{,}3$; $b \approx 9{,}1$; в) $\angle B \approx 37°59'$; $\angle C \approx 62°1'$; $c \approx 14$; г) $\angle A = 65°$; $b \approx 19{,}2$; $c \approx 25{,}5$; е) $c \approx 5{,}7$; $\angle A = \angle B = 63°$; и) $\angle A \approx 54°52'$; $\angle B \approx 84°16'$; $\angle C \approx 40°52'$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок на этапе актуализации знаний и за самостоятельное решение задач.)

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Как можно вычислить стороны и углы треугольника, если известны:

   а) одна сторона и два угла;

   б) две стороны и угол?

2. Сформулируйте теорему синусов.
3. Сформулируйте теорему косинусов.

### Домашнее задание

1. П. 101, 102, вопросы 8, 9 (учебник, с. 266).
2. Решить задачу № 42 (рабочая тетрадь), № 1025 (б, д, ж, и).

## Урок 30. Решение треугольников

***Основная дидактическая цель урока:*** научить учащихся решать задачи на использование теоремы синусов и теоремы косинусов.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проводит теоретический опрос по вопросам 8, 9 учебника; проверяет решение задачи № 42 (рабочая тетрадь). В конце урока учитель собирает рабочие тетради у менее подготовленных учащихся.)

2. Решение задач по готовым чертежам (устно).

(При решении задач особое внимание уделить правильному выбору теоремы (т. е. выбору той теоремы, которая позволяет решить задачу наиболее рационально).)

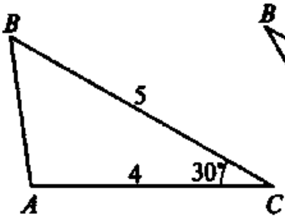



Рис. 11.37

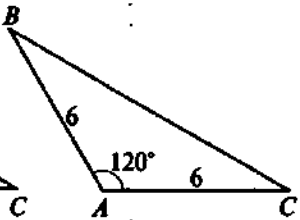



Рис. 11.38

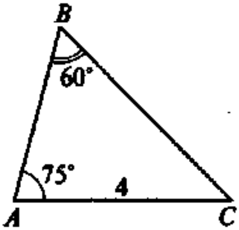



Рис. 11.39

1) Рис. 11.37. *Найти: AB.*

2) Рис. 11.38. *Найти: BC.*

3) Рис. 11.39. *Найти: AB.*

4) Рис. 11.40. *Найти:* $\angle B$.

5) Рис. 11.41. *Найти:* $\angle A$.

6) Рис. 11.42. *Найти:* $\angle B$.

***Ответы к задачам по готовым чертежам:***

1) $AB = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$. 2) $BC = 6\sqrt{3}$. 3) $AB = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. 4) $\angle B = 60°$. 5) $\angle A = 15°$. 6) $\angle B = 75°$.

***Критерии оценивания:***

- оценка «5» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

3. Индивидуальная работа по карточкам.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проверки домашнего задания.)

**I уровень сложности**

1. *Дано:* $\Delta ABC$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 15°$, $BC = 4\sqrt{6}$.

*Найти:* $AB$, $AC$, $\angle B$.

2. *Дано:* $\Delta MNK$, $MN = 6$ см, $MK = 10$ см, $\angle M = 120°$.

*Найти:* $NK$, $\angle N$, $\angle K$.

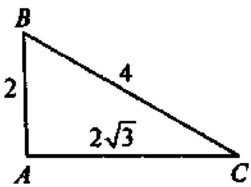



Рис. 11.40

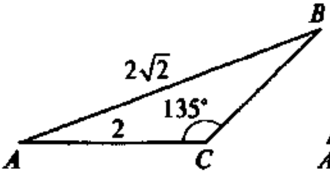



Рис. 11.41

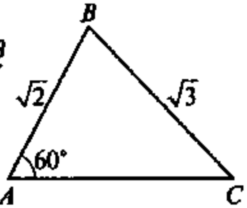



Рис. 11.42

3. *Дано:* $\Delta OPT$, $OP = 24$, $PT = 30$, $OT = 36$.

*Найти:* $\angle O$, $\angle P$, $\angle T$.

**II уровень сложности**

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC = 10$. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle BAC = 30°$, $\angle DAC = 45°$.

2. В равнобедренном треугольнике $ABC$ один из углов при основании $AC$ равен 30°, наименьшая медиана равна $\sqrt{7}$. Найдите другие медианы треугольника.

3. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите углы треугольника.

**III уровень сложности**

1. В треугольнике $MNK$ $MN = 4$, $NK = 5$, а его площадь равна $5\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины $N$ до стороны $MK$, если известно, что $\cos\angle MNK < 0$.

2. В треугольнике $CDE$ $\angle C = 64°$, $\angle D = 50°$, $DE + CE = 21$. Найдите неизвестные элементы треугольника.

3. В треугольнике $ABC$ $BC = 3{,}4$; $\angle ABC = 130°$, а его площадь равна 3,6. Найдите $AC$.

**III. Определение темы урока**

1. Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы по 5–6 человек. Каждая группа получает одну из задач. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

Дан треугольник $ABC$ (рис. 11.43).

(Рисунок к задаче подготовить на доске заранее.)

Запишите формулу для вычисления:

а) $BC$, если $AB = c$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$;

б) $AC$, если $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$;

в) $\angle C$, если $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$;

г) $\angle B$, если $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$;

д) $AB$, если $\angle C = \gamma$; $\angle B = \beta$, $AC = b$.

*Ответ:*

а) $BC = \sqrt{c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha}$;

б) $AC = \dfrac{a \cdot \sin\beta}{\sin(\gamma + \beta)}$;

в) $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$;

г) $\angle B = 180° - (\alpha + \gamma)$;

д) $AB = \dfrac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$.

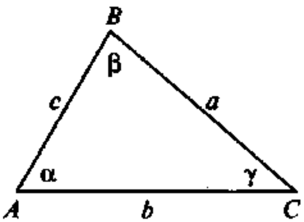



Рис. 11.43

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## IV. Работа по теме урока

– Решением треугольника называется нахождение всех его сторон и углов.

Вопросы для обсуждения.

– Перечислите три основные задачи на решение треугольников.

– Составьте план решения задач:

а) по двум сторонам и углу между ними;

б) по стороне и прилежащим к ней углам;

в) по трем сторонам.

## V. Решение задач

1. Работа в парах.

Разобрать решение задачи № 46 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

***Задача № 46***

(Дать учащимся 2–3 мин на самостоятельное решение, а затем заслушать варианты решений.)

Наводящие вопросы.

– Какой угол лежит между сторонами $a$ и $b$?

– Почему в п. 2 решения $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$? Как получилось данное равенство?

– Какая теорема используется для нахождения угла $B$?

*Ответ:* $c = \sqrt{7} \approx 2{,}65$; $\angle A \approx 139°$; $\angle B \approx 11°$.

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1026, № 1029, № 1031 (в).

***Задача № 1026***

*Решение:* $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 45°$ (рис. 11.44).

По теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \dfrac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \dfrac{12 \cdot \sin 60°}{\sin 45°} =$

$= \dfrac{12 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{6}$ см.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A = \dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{6} \cdot 12 \sin 75° \approx 87$ см$^2$.

*Ответ:* $AB = 6\sqrt{6}$ см; $S \approx 87$ см$^2$.

***Задача № 1029***

*Решение:*

1) Из $\Delta BB_1C$ по теореме синусов $\dfrac{BB_1}{\sin\angle BCB_1} = \dfrac{BC}{\sin\angle BB_1C}$ (рис. 11.45).

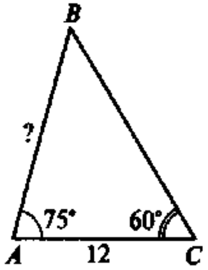



**Рис. 11.44**

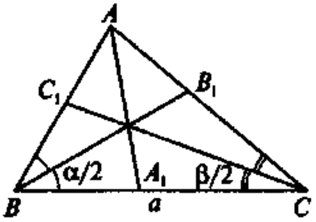



**Рис. 11.45**

$$\angle BB_1C = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \Rightarrow \sin\angle BB_1C = \sin\left(180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \Rightarrow BB_1 = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}.$$

2) Из $\Delta CC_1B$ по теореме синусов $\frac{CC_1}{\sin\angle C_1BC} = \frac{BC}{\sin\angle BC_1C}$.

$$\angle BC_1C = 180° - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \sin\angle BC_1C = \sin\left(180° - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right) =$$

$$= \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow CC_1 = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

3) Из $\Delta BAA_1$ по теореме синусов $\frac{AA_1}{\sin\angle ABA_1} = \frac{AB}{\sin\angle BA_1A}$. (1)

$$\angle BA_1A = 180° - (\angle ABA_1 + \angle BAA_1) = 180° - \left(\alpha + \frac{180°(\alpha + \beta)}{2}\right) =$$

$$= 180° - \left(90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

$$\sin\left(90° - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (2)$$

Из $\Delta ABC$ по теореме синусов $\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(180° - (\alpha + \beta))} \Rightarrow$

$AB = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. (3)

Подставляя равенства (2) и (3) в равенство (1), получаем:

$$A_1A = \frac{AB\sin\angle ABA_1}{\sin\angle BA_1A} = \frac{\dfrac{a\sin\beta}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}\sin\alpha}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}.$$

*Ответ:* $\dfrac{a\cdot\sin\beta}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}$; $\dfrac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)}$; $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$.

***Задача № 1031 (в)***

***Решение:***

Пусть в треугольнике $ABC$ $AB = 9$, $BC = 5$, $AC = 6$. Так как наибольшей стороной является $AB$, то наибольшим углом будет угол, лежащий напротив стороны $AB$, т. е. угол $C$.

По теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos C$.

Следовательно, $\cos C = \dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC} = \dfrac{6^2+5^2-9^2}{2\cdot 6\cdot 5} = -\dfrac{1}{3}$.

Так как $\cos C < 0$, то $\angle C$ – тупой, $\Delta ABC$ – тупоугольный.

*Ответ:* Тупоугольный.

***Критерии оценивания:***

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок на этапе актуализации знаний и за самостоятельное решение задач.)

## VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Как решить треугольник:
   а) по двум сторонам и углу между ними;
   б) по стороне и прилежащим к ней углам;
   в) по трем сторонам?
2. Сформулируйте теорему синусов.
3. Сформулируйте теорему косинусов.

## Домашнее задание

1. П. 103, вопросы 10, 11 (учебник, с. 266).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1027, 1028, 1031 (а, б) (учебник), № 45 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1027, 1028, 1031 (а, б), 1032.

# Урок 31. Решение треугольников

***Основные дидактические цели урока:*** доказать, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности; показать применение данной теоремы при решении задач; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

1) Что значит «решить треугольник»?

2) Сформулируйте основные задачи на решение треугольников.

3) Используя рисунки, составьте план решения задач.

а) Рис. 11.46. *Найти:* $BC$, $\angle B$, $\angle C$.

б) Рис. 11.47. *Найти:* $\angle B$, $AB$, $BC$.

в) Рис. 11.48. *Найти:* $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проведения теоретического опроса.)

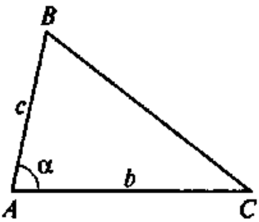


Рис. 11.46

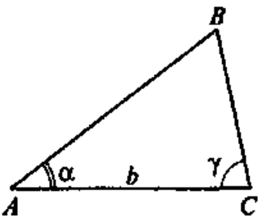


Рис. 11.47

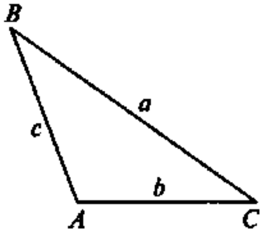


Рис. 11.48

**I уровень сложности**

Рис. 11.49.

1. Запишите формулу для вычисления:

а) $MN$, если $MK = a$, $NK = b$, $\angle K = \alpha$;

б) $NK$, если $MK = a$, $\angle M = \alpha$, $\angle K = \beta$;

в) $\angle M$, если $MN = a$, $NK = b$, $MK = c$.

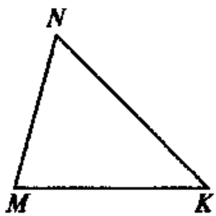


Рис. 11.49

2. Вычислите площадь треугольника $MNK$, если $MK = 6$, $\angle N = 60°$, $\angle K = 45°$.

**II уровень сложности**

1. Решите треугольник $ABC$, если $AB = 4$, $BC = 6$, $\angle C = 45°$.

2. Выясните, является ли треугольник тупоугольным, если его стороны равны 6, 7 и 10.

3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $AD = 8$, диагональ $BD$ равна 9. Найдите диагональ $AC$.

**III уровень сложности**

1. Найдите медианы треугольника со сторонами $a$, $b$, $c$.

2. В треугольнике $ABC$ $AB = BC$, $BD$ – высота. Через середину высоты проведена прямая, пересекающая стороны $AB$ и $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно.

Найдите $EF$, если $BD = h$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BEF = \alpha$.

3. Самостоятельное решение задач по готовым чертежам.

Решить задачи по готовым чертежам с последующим обсуждением.

1. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 11.50).
*Найти:* $BD$.

2. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 11.51).
*Найти:* $BD$.

3. *Дано:* $ABCD$ – ромб (рис. 11.52).
*Найти:* $AC$.

4. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 11.53).
*Найти:* $AC$.

5. Рис. 11.54.
*Найти:* $\angle C$.

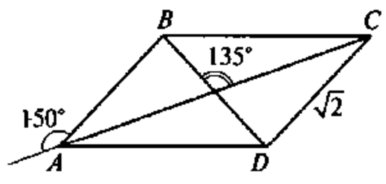


Рис. 11.50

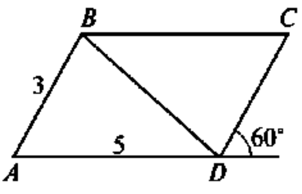


Рис. 11.51

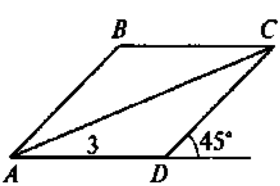


Рис. 11.52

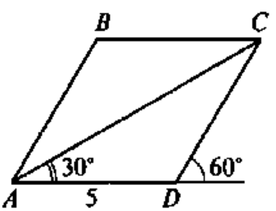


Рис. 11.53

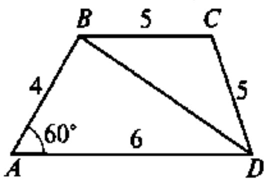



Рис. 11.54

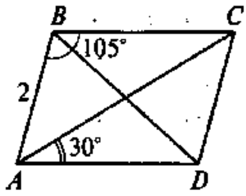



Рис. 11.55

6. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 11.55).

*Найти:* $BC$.

*Ответы к задачам по готовым чертежам:*

1. $BD = 2$. 2. $BD = \sqrt{19}$. 3. $AC = 3\sqrt{2+\sqrt{2}}$. 4. $AC = 5\sqrt{3}$. 5. $\angle C \approx 26°6'$. 6. $BC = 2\sqrt{2}$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

**III. Решение задач**

1. Прочитать самостоятельно задачу № 1033 (учебник).

На доске и в тетрадях запись:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где $R$ – радиус описанной окружности.

2. Работа в парах.

Решить задачи № 1, 2 с последующим обсуждением.

***Задача 1.*** В треугольнике $ABC$ $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$, $AB = 12$ см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

*Ответ:* $R = 4\sqrt{3}$ см.

***Задача 2.*** В треугольнике $MNK$ $MN = 6$, радиус описанной около него окружности равен 6 см, а $\angle N = 45°$. Найдите площадь треугольника $MNK$.

*Ответ:* $S \approx 24{,}6$ см.

3. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

*I уровень сложности:* задачи № 3, 4, 5.

*II уровень сложности:* задачи № 5, 6, № 1030 (учебник).

***Задача 3.*** Треугольник $CDE$ вписан в окружность с радиусом $2\sqrt{3}$, $\angle C = 75°$, $\angle E = 45°$. Найдите $CE$.

*Ответ:* $CE = 6$.

***Задача 4.*** В треугольнике $PST$ $PS = 20$, $ST = 48$, радиус описанной около него окружности равен 25. Найдите площадь треугольника.

*Ответ:* $S = 475{,}8$.

***Задача 5.*** Стороны треугольника равны 12, 13 и 14. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

*Ответ:* $R \approx 7{,}55$.

***Задача 6.*** В треугольнике $ABC$ $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 3$. Площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности, если центр лежит внутри треугольника.

*Ответ:* $R = \sqrt{21}$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок на этапе актуализации знаний и за самостоятельное решение задач.)

### IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Как решить треугольник:
   а) по двум сторонам и углу между ними;
   б) по стороне и прилежащим к ней углам;
   в) по трем сторонам.
2. Чему равно отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла?

### Домашнее задание

1. Подготовить доказательство задачи № 1033;
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1034 (учебник), № 47, 48 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1034, 1035, дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

В треугольнике $ABC$ $AB = 2{,}2$; $BC = 3{,}2$; $\angle ABC = 53°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

*Ответ:* $R \approx 1{,}6$.

## Урок 32. Измерительные работы

***Основная дидактическая цель урока:*** познакомить учащихся с методами измерительных работ; показать применение теорем синусов и косинусов при выполнении измерительных работ.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задач № 1024, 1035. Два ученика заранее записывают решение на доске. Решение задач № 47, 48 – проверить индивидуально у нескольких учеников.)

***Задача № 1034***

*Решение:* Пусть $AB = BC = CD = x$ (рис. 11.56).

Из $\Delta ABC$ по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \times \cos\angle ABC$, $\angle ABC = 180° - \angle BAD = 110° \Rightarrow AC^2 = x^2 + x^2 - 2x \times x \cdot \cos 110° = 2x^2 - 2x^2 \cdot (-0{,}3420) = 2{,}684x^2$. (1)

Из $\Delta ACD$ по теореме косинусов $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \times CD \cdot \cos\angle ADC \Rightarrow AC^2 = 100 + x^2 - 20x \cdot 0{,}342 = x^2 - 6{,}84x + 100$. (2)

Приравняем равенства (1) и (2), тогда $2{,}684x^2 = x^2 - 6{,}84x + 100$; $1{,}684x^2 + 6{,}84x - 100 = 0$.

$D = 6{,}84^2 - 4 \cdot 1{,}684 \cdot (-100) = 720{,}3856$; $\sqrt{D} = 26{,}84$.

$$x_1 = \frac{-6{,}84 + 26{,}84}{2 \cdot 1{,}684} \approx 5{,}94.$$

$$x_2 = \frac{-6{,}84 - 26{,}84}{2 \cdot 1{,}684} < 0$$ (не подходит по условию задачи).

Так как $x_1 \approx 5{,}94$, то $P = 5{,}94 \cdot 3 + 10 = 27{,}82$ см.

*Ответ:* $P \approx 27{,}82$ см.

Наводящие вопросы.

– Почему $\angle ABC = 110°$?

– Почему можно предположить, что $AB = BC = CD = x$?

– Объясните справедливость равенства $2{,}684x^2 = x^2 - 6{,}84x + 100$.

– Почему $x_2$ не подходит по условию задачи?

***Задача № 1035***

*Решение:* Так как хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $E$, то $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (рис. 11.57).

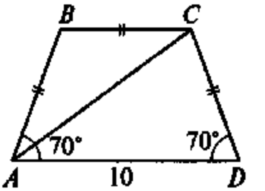



Рис. 11.56

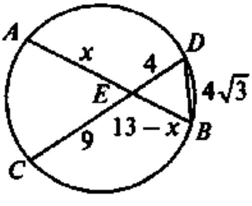



Рис. 11.57

$AB = 13$ см, тогда, если $AE = x$ см, то $EB = 13 - x$ см. Тогда $x \cdot (13 - x) = 9 \cdot 4$.

По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = 13, \\ x_1 \cdot x_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 9.$

Так как $x = 4$ см или $x = 9$ см, то $EB = 4$ см или $EB = 9$ см.

Из $\Delta DBE$ по теореме косинусов $DB^2 = DE^2 + EB^2 - 2DE \times \times EB \cdot \cos\angle DEB$, следовательно, $\cos\angle DEB = \dfrac{DE^2 + EB^2 - DB^2}{2DE \cdot EB}$.

Если $EB = 4$ см, то $\cos\angle DEB = \dfrac{4^2 + 4^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = -\dfrac{1}{2}$, следовательно, $\angle DEB = 120°$ и острый угол между хордами $AB$ и $CD$ равен $180° - 120° = 60°$.

Если $EB = 9$ см, то $\cos\angle DEB = \dfrac{4^2 + 9^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \dfrac{49}{72} \approx 0{,}6806$.

Тогда $\angle DEB \approx 47°6'$.

*Ответ:* 60° или 47°6′.

Наводящие вопросы.

– Почему верно равенство $AE \cdot EB = CE \cdot ED$?

– Почему $\cos\angle DEB = \dfrac{DE^2 + EB^2 - DB^2}{2DE \cdot EB}$?

– На основании какой теоремы появилось это равенство?

– Докажите, что если $\cos\angle DEB = -\dfrac{1}{2}$, то $\angle DEB = 120°$.

**III. Определение темы урока**

Работа в группах.

(Дать учащимся 2–3 мин на самостоятельное решение, а затем заслушать варианты решений.)

***Задание 1.*** $AC = 3{,}3$ м; $AC_1 = 13{,}2$ м; $BC = 1{,}5$ м (рис. 11.58). Найдите высоту дерева.

***Задание 2.*** $AC = 112$ м; $A_1C_1 = 5{,}6$ см; $A_1B_1 = 8{,}4$ см (рис. 11.59). Найдите расстояние от точки $A$ до недоступной точки $B$.

(Решить задачи, используя подобие треугольников, а затем рассмотреть решения задач с применением тригонометрических функций (теорем синусов и косинусов).)

**IV. Работа по теме урока**

1. Фронтальная работа с классом.

– Как определить высоту предмета при условии, что основание предмета доступно?

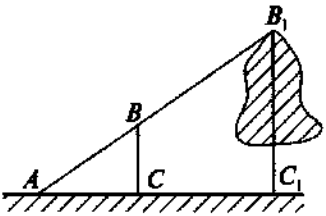



Рис. 11.58

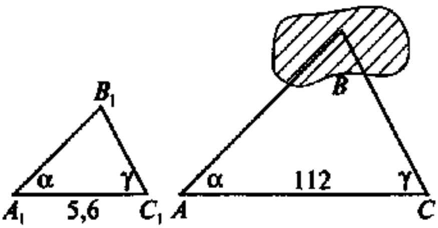



Рис. 11.59

– Как определить высоту предмета в случае, если основание предмета недоступно?
– Найдите высоту дерева на рисунке 295 учебника, если $a = 10$ м, $\alpha = 60°$.
– Найдите высоту дерева на рисунке 295 учебника, если $BC = 2$ м, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.
2. Работа в группах с последующим обсуждением.
– Как измерить расстояние до недоступной точки?
– Найдите расстояние от пункта $A$ до пункта $C$, если $AB = 30$ м, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ (рис. 296 учебника).

**V. Решение задач**

1. Фронтальная работа с классом.

Разобрать решение задачи № 1036.

***Задача № 1036***

*Дано:* $\angle BAD = 45°$, $\angle CAD = 2°$, $EC = 50$ м.

*Найти:* $BC$.

*Решение:* В $\Delta ABD$ $\angle D = 90°$, $\angle A = 45°$ (рис. 11.60), следовательно, $AD = DB = 50$ м. ($AD = EC = 50$ м, так как $ADCE$ прямоугольник.)

В $\Delta ADC$ $\angle D = 90°$, $\angle A = 2°$, $AD = 50$ м, $\text{tg}A = \frac{DC}{AD}$, следовательно, $DC = AD \cdot \text{tg}A = 50 \cdot \text{tg}2° \approx 50 \cdot 0{,}0349 = 1{,}745$ м.

$BC = BD + DC = 50 + 1{,}745 = 51{,}745$ м.

*Ответ:* $\approx 51{,}745$ м.

Наводящие вопросы.
– Как рисунок 298 учебника можно преобразовать в геометрический чертеж?
– Что вы можете сказать о $\Delta ABD$?
– Как найти сторону $DC$ треугольника $ADC$?
– Чему равен отрезок $BC$, т. е. высота башни?

2. Самостоятельное решение задач с последующим обсуждением.

Решить задачу № 1037.

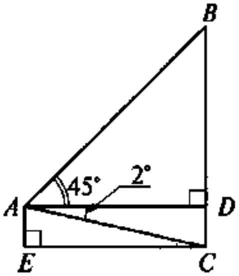



Рис. 11.60

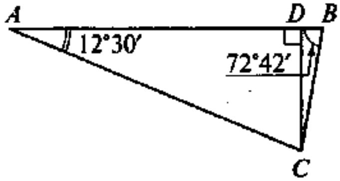



Рис. 11.61

***Задача № 1037***

*Дано:* $\Delta ABC$, $AB = 70$ м, $\angle A = 12°30'$, $\angle B = 72°42'$, $CD \perp AB$.

*Найти:* $CD$.

*Решение:* В $\Delta ADC$ $\angle D = 90°$, $CD = AD \cdot \operatorname{tg} 12°30'$ (рис. 11.61).

В $\Delta BDC$ $\angle D = 90°$, $CD = BD \cdot \operatorname{tg} 72°42'$.

Так как $AB = 70$, то $BD = 70 - AD$, тогда $CD = AD \cdot \operatorname{tg} 12°30' = (70 - AD) \cdot \operatorname{tg} 72°42'$; $AD \cdot 0{,}2217 \approx (70 - AD) \cdot 3{,}21$; $3{,}4327 \cdot AD = 224{,}77$.

$AD \approx 65{,}48$ м.

$CD \approx 65{,}48 \cdot 0{,}2217 \approx 14{,}52$ м.

*Ответ:* $\approx 14{,}52$ м.

Вопросы для обсуждения.

– Начертите рисунок к задаче. Чем для $\Delta ABC$ является расстояние от дерева $C$ до другого берега?
– Расстояние от точки $A$ до точки $B$ равно 70 м. Чему равны отрезки $AD$ и $BD$?
– Чему равна сторона $CD$ в треугольнике $ADC$? В треугольнике $DBC$?
– Составьте уравнение и найдите приближенное значение $CD$.

## VI. Самостоятельное решение задач

*I уровень сложности:* задачи № 1060 (г), № 1061 (б).

*II уровень сложности:* задача № 1030.

(Учитель в процессе решения по необходимости оказывает индивидуальную помошь учащимся.)

***Задача № 1060 (г)***

*Дано:* $AC = 10{,}4$ см, $BC = 5{,}2$ см, $\angle B = 62°48'$.

*Найти:* $\angle A$, $\angle C$, $AB$.

*Решение:* По теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin\angle B} = \dfrac{BC}{\sin\angle A} \Rightarrow$

$$\frac{10{,}4}{\sin 62°48'} = \frac{5{,}2}{\sin\angle A},\ \sin\angle A \approx \frac{5{,}2 \cdot 0{,}8894}{10{,}4} \approx 0{,}447 \Rightarrow \angle A \approx 26°24'.$$

$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (26°24' + 62°48') = 90°48'$.

По теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin\angle B} = \dfrac{AB}{\sin\angle C} \Rightarrow \dfrac{10,4}{\sin 62°48'} = \dfrac{AB}{\sin 90°48'} \Rightarrow$
$AB \approx \dfrac{10,4 \cdot 0,9999}{0,8894} \approx 11,69$ см.

*Ответ:* $\angle A \approx 26°24'$; $\angle C \approx 90°48'$; $AB \approx 11,69$ см.

***Задача № 1061 (б)***

*Дано:* $AB = 2\sqrt{2}$ дм, $BC = 3$ дм, $\angle B = 45°$.

*Найти:* $AC$, $\angle A$, $\angle C$.

*Решение:* По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \times$ $\times \cos\angle B = 8 + 9 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5$. Тогда $AC = \sqrt{5}$ дм.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C \Rightarrow \cos\angle C =$
$= \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \dfrac{5+9-8}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \approx 0,4472 \Rightarrow \angle C \approx 63°26'$.

$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) \approx 180° - (45° + 63°26') = 71°34'$.

*Ответ:* $AC = \sqrt{5}$ дм; $\angle A \approx 71°34'$; $\angle C \approx 63°26'$.

***Задача № 1030***

*Дано:* $\Delta ABCD$ — параллелограмм. $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$.

*Найти:* $BD$, $AC$, $\angle AOB$.

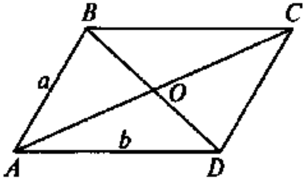


Рис. 11.62

*Решение:* Из $\Delta ABD$ по теореме косинусов $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \times$ $\times \cos\angle A = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, следовательно, $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ (рис. 11.62).

В $\Delta ABC$ $\angle ABC = 180° - \alpha$, $\cos\angle ABC =$ $= \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC =$ $= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, следовательно, $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$.

В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$, $BO =$ $= \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

В $\Delta AOB$ по теореме косинусов $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \times$ $\times \cos\angle$AOB, следовательно, $\cos\angle AOB = \dfrac{AO^2 + BO^2 - AB^2}{2AO \cdot BO} =$

$$= \frac{\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha) + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha) - a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - a^2}{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha)(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)}} =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha}}.$$

*Ответ:* $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$; $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$;

$$\cos\angle AOB = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha}}.$$

### VII. Рефлексия учебной деятельности

1. Как определить высоту предмета в случае, если основание предмета доступно?
2. Как определить высоту предмета в случае, если основание предмета недоступно?
3. Как измерить расстояние до недоступной точки?

### Домашнее задание

1. П. 104, вопросы 11, 12 (учебник, с. 266).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1060 (а, в), 1061 (а, в), 1038 (учебник); II уровень сложности: № 1038, 1064, 1059.

## Урок 33. Обобщение по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника»

***Основные дидактические цели урока:*** закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверочный тест

(Задания теста учащиеся выполняют самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справилось большинство учащихся.)

***Вариант 1***

1. Для треугольника $ABC$ справедливо равенство:

а) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle BCA$;

б) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle ABC$;

в) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ACB$.

2. Площадь треугольника $MNK$ равна:

а) $\frac{1}{2}MN \cdot MK \cdot \sin\angle MNK$;

б) $\frac{1}{2}MK \cdot NK \cdot \sin\angle MNK$;

в) $\frac{1}{2}MN \cdot NK \cdot \sin\angle MNK$.

3. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то эта сторона лежит против:

а) тупого угла;

б) прямого угла;

в) острого угла.

4. В треугольнике $ABC$ известны длины сторон $AB$ и $BC$. Чтобы найти сторону $AC$, необходимо знать величину:

а) угла $A$; б) угла $B$; в) угла $C$.

5. Треугольник со сторонами 5, 6 и 7 см:

а) остроугольный;

б) прямоугольный;

в) тупоугольный.

6. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 30°$, $BC = 3$. Радиус описанной около $\Delta ABC$ окружности равен:

а) 1,5; б) $2\sqrt{3}$; в) 3.

7. Если в треугольнике $ABC$ $\angle A = 48°$, $\angle B = 72°$, то наибольшей стороной треугольника является сторона:

а) $AB$; б) $AC$; в) $BC$.

8. В треугольнике $CDE$:

а) $CD \cdot \sin C = DE \cdot \sin E$;

б) $CD \cdot \sin E = DE \cdot \sin C$;

в) $CD \cdot \sin D = DE \cdot \sin E$.

9. По теореме синусов:

а) стороны треугольника обратно пропорциональны синусам противолежащих углов;

б) стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов;

в) стороны треугольника пропорциональны синусам прилежащих углов.

10. В треугольнике $ABC$ $AB = 10$ см, $BC = 5$ см. Отношение синуса угла $A$ к синусу угла $C$ равно:

а) $\frac{1}{2}$; б) 5; в) 2.

***Вариант 2***

1. Для треугольника $ABC$ справедливо равенство:

а) $\frac{AB}{\sin A} = \frac{BC}{\sin B} = \frac{CA}{\sin C}$;

б) $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$;

в) $\frac{AB}{\sin B} = \frac{BC}{\sin C} = \frac{CA}{\sin A}$.

2. Площадь треугольника $CDE$ равна:

а) $\frac{1}{2}CD \cdot DE \cdot \sin\angle CDE$;

б) $\frac{1}{2}CD \cdot DE$;

в) $CD \cdot DE \cdot \sin\angle CDE$.

3. Если квадрат стороны треугольника больше суммы квадратов двух других его сторон, то эта сторона лежит против:

а) острого угла;

б) прямого угла;

в) тупого угла.

4. В треугольнике $MNK$ известны длина стороны $MN$ и величина угла $K$. Чтобы найти сторону $NK$, необходимо знать:

а) величину $\angle M$;

б) длину стороны $MK$;

в) значение периметра $MNK$.

5. Треугольник со сторонами 2, 3 и 4 см:

а) остроугольный;

б) прямоугольный;

в) тупоугольный.

6. В треугольнике $MNK$ $MN = 2$, $\angle K = 60°$. Радиус описанной около $\Delta\ MNK$ окружности равен:

а) 4; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) 2.

7. Если в треугольнике $MNK$ $\angle M = 76°$, $\angle N = 64°$, то наименьшей стороной треугольника является сторона:

а) $MN$; б) $NK$; в) $MK$.

8. В треугольнике $ABC$:

а) $AB \cdot \sin C = AC \cdot \sin B$;

б) $AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C$;

в) $AB \cdot \sin A = AC \cdot \sin B$.

9. По теореме о площади треугольника:
   а) площадь треугольника равна произведению двух его сторон на синус угла между ними;
   б) площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на угол между ними;
   в) площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

10. В треугольнике $ABC$ $AB = 6$ см, $BC = 2$ см. Отношение синуса угла $A$ к синусу угла $B$ равно:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$; в) 3.

*Ответы к тесту:*

***Вариант 1:*** 1 – а; 2 – в; 3 – б; 4 – б; 5 – а; 6 – в; 7 – б; 8 – а; 9 – а; 10 – а.

***Вариант 2:*** 1 – б; 2 – а; 3 – в; 4 – а; 5 – в; 6 – б; 7 – а; 8 – б; 9 – в; 10 – а.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 9–10 баллов;
- оценка «4» – 7–8 баллов;
- оценка «3» – 5–6 баллов;
- оценка «2» – менее 5 баллов.

## III. Решение задач

Работа в парах.

(Учитель в процессе решения по необходимости оказывает индивидуальную помощь учащимся.)

**I уровень сложности**

1. Основание $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ равно 6 см. Медианы $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $O$. Найдите $AA_1$, если угол $B_1OA$ равен 60°.

2. Найдите диагональ параллелограмма, если вторая диагональ равна 8 см, а стороны равны 4 и 6 см.

3. Найдите сторону треугольника, если противолежащий ей угол равен 60°, а радиус описанной окружности равен 9 см.

**II уровень сложности**

1. Сторона треугольника равна 26 см, а две другие образуют угол, равный 120°, и относятся как 7 : 8. Найдите эти стороны.

2. Основание треугольника равно 7 см, угол при вершине равен 60°, сумма боковых сторон равна 13 см. Найдите боковые стороны.

3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

*Ответы к задачам:*

**I уровень сложности**

1. $3\sqrt{3}$ см.
2. $2\sqrt{10}$ см.
3. $9\sqrt{3}$ см.

**II уровень сложности**

1. 14 см, 16 см.
2. 5 см, 8 см.

## IV. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Площадь параллелограмма равна $30\sqrt{3}$ см$^2$, а один из углов равен 60°. Найдите его периметр, если длина одной из сторон равна 6 см.

2. В треугольнике $MNK$ $MN = NK$, $MK = \sqrt{2}$, $\angle M = 30°$, $MA$ – биссектриса. Найдите $MA$.

3. Стороны треугольника равны 8, 10 и 12 см. Найдите угол, лежащий против меньшей стороны.

***Вариант 2***

1. Площадь параллелограмма равна $40\sqrt{2}$ см$^2$, а один из углов равен 45°. Найдите его периметр, если длина одной из сторон равна 10 см.

2. В треугольнике $CDE$ $CM$ – биссектриса, $\angle DCE = 60°$, $ME = 3\sqrt{2}$. Найдите $CM$, если $\angle CED = 45°$.

3. Стороны треугольника равны 6, 9 и 10 см. Найдите угол, лежащий против большей стороны.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. В треугольнике $ABC$ медианы $CD$ и $BE$ пересекаются в точке $K$. Найдите площадь четырехугольника $ADKE$, если $BC = 20$, $AC = 12$, $\angle ACB = 135°$.

2. В треугольнике $CDE$ $CE = b$, $\angle C = \alpha$, $\angle D = \beta$. На стороне $CE$ отмечена точка $P$ так, что $\angle DPE = \gamma$. Найдите $DP$.

3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 6$, $AD = 8$, $AC = 2\sqrt{13}$. Найдите $BD$.

***Вариант 2***

1. В треугольнике $MNK$ медианы $MA$ и $NB$ пересекаются в точке $C$ и образуют угол в 45°. Найдите площадь треугольника $MNK$, если $MA = 12$, $NB = 9$.

2. В треугольнике $ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне $BC$ отмечена точка $E$ так, что $AE = m$, $\angle AEB = \gamma$. Найдите $AC$.

3. В параллелограмме $MNKP$ $MN = 4$, $MP = 6$, $NP = 2\sqrt{7}$. Найдите $MK$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Центр описанной вокруг треугольника $ABC$ окружности лежит вне треугольника, и угол $A$ наибольший. Найдите угол $A$, если $AB = 3$ см, $AC = 4$ см и площадь треугольника равна 3 см$^2$.

2. В треугольнике $ABC$ $AB = BC$, $BD$ – высота. Через середину высоты проведена прямая, пересекающая стороны $AB$ и $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Найдите $EF$, если $BD = h$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BEF = \alpha$.

3. Стороны треугольника равны 6, 7 и 8. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

***Вариант 2***

1. Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника $ABC$, находится вне этого треугольника, и угол $C$ наибольший. Найдите величину угла $C$, если площадь треугольника равна $2\sqrt{3}$ см$^2$, $AC = 2$ см, $BC = 4$ см.

2. В треугольнике $ABC$ $AB = BC$. Через середину высоты $BD$ треугольника проведена прямая, пересекающая стороны $AB$ и $BC$ в точках $K$ и $L$ соответственно, $KL = m$. Найдите высоту $BD$, если $\angle ABC = \beta$, $\angle BLK = \alpha$.

3. Стороны треугольника равны 4, 6 и 7. Найдите медиану, проведенную к меньшей стороне.

***Ответы к задачам самостоятельной работы:***

**I уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. 10 см. | 1. 8 см. |
| 2. 1 см. | 2. 6 см. |
| 3. 41°30′. | 3. 80°57′. |

**II уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. $20\sqrt{2}$. | 1. $36\sqrt{2}$. |
| 2. $\dfrac{b\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}$. | 2. $\dfrac{m\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$. |
| 3. $2\sqrt{37}$. | 3. $4\sqrt{5}$. |

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $150°$.

2. $\dfrac{h\sin\beta\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)}{2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}$.

3. $\sqrt{\dfrac{53}{2}}$.

***Вариант 2***

1. $120°$.

2. $\dfrac{2m\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)}$.

3. $\sqrt{39}$.

(После окончания самостоятельного решения задач и самопроверки по готовым ответам выполняется самооценка.)

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены три задачи;
- оценка «4» — правильно решены две задачи;
- оценка «3» — правильно решена одна задача;
- оценка «2» — все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение теста и за самостоятельную работу.)

### V. Рефлексия учебной деятельности

Обсуждение принципа решения задач в группах с последующей проверкой по готовым ответам.

### Домашнее задание

Решить задачи № 1057, 1058, 1062, 1063 (учебник).

## Урок 34. Скалярное произведение векторов

***Основная дидактическая цель урока:*** познакомить учащихся с понятием угла между векторами; ввести понятия скалярного произведения двух векторов, скалярного квадрата вектора.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

**III. Актуализация знаний учащихся**

Работа в парах.

Решить задачи № 1, 2.

***Задача 1***

*Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 11.63).

***Найти:***

а) векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{OC}$;

б) векторы, сонаправленные $\overrightarrow{AB}$;

в) векторы, противоположно направленные $\overrightarrow{BC}$;

г) векторы, равные $\overrightarrow{BO}$;

д) $\overrightarrow{BD}$, если $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{BC}| = 5$, $\angle BAD = 60°$;

е) $\cos\angle ABC$, если $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{BC}| = 4$.

***Задача 2***

*Дано:* $ABCD$ – квадрат (рис. 11.64).

***Найти:***

а) $\overrightarrow{BO}$, если $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$;

б) $\angle ABO$, $\angle AOB$;

в) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|$;

г) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$;

д) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

**IV. Определение темы урока**

– Перечислите действия, которые мы можем выполнять с векторами.

– Можно ли умножить один вектор на другой?

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

**V. Работа по теме урока**

1. Ввести понятие угла между векторами.

$(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ (рис. 11.65).

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$.

Если $(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2. Ввести понятие скалярного произведения векторов.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

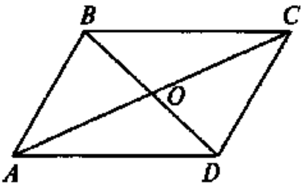



Рис. 11.63

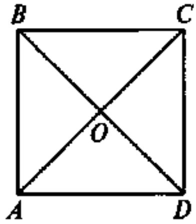



Рис. 11.64

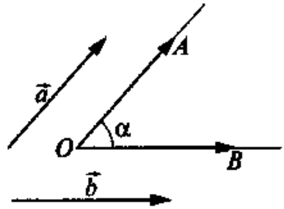



Рис. 11.65

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0 \Leftrightarrow 0\le(\vec{a},\ \vec{b})<90°$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0 \Leftrightarrow 90°<(\vec{a},\ \vec{b})\le 180°$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a},\ \vec{b})=0$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ – скалярный квадрат вектора $\vec{a}$.

**VI. Закрепление изученного материала**

1. Работа в парах.

Решить задачи № 49, 52 (рабочая тетрадь) с последуюшим обсуждением.

2. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

*I уровень сложности:* задачи № 1039, 1041.

*II уровень сложности:* дополнительные задачи № 1–3.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1***

*Дано:* В трапеции $MNKP$ $MP \parallel NK$, $\angle M=90°$, $MP=6$, $NK=2$, $MN=6$.

*Найти:* а) $\overline{NM}\cdot\overline{KP}$; б) $\overline{MP}\cdot\overline{PK}$; в) $\overline{NK}\cdot\overline{PM}$.

***Задача 2***

*Дано:* В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle A=\angle D$, $AD=15$, $BC=5$, $AB=13$, $CE$ – высота трапеции.

*Найти:* а) $\overline{DC}\cdot\overline{DA}$; б) $\overline{CE}\cdot\overline{AB}$; в) $\overline{BC}\cdot\overline{AD}$.

***Задача 3***

*Дано:* В прямоугольной трапеции $MNKP$ $\angle M=90°$, $MP$ и $NK$ – основания трапеции, $MP=5$, $NK=3$.

*Найти:* $\overline{MN}\cdot\overline{NK}+\overline{NK}\cdot\overline{KP}+\overline{KP}\cdot\overline{PM}+\overline{PM}\cdot\overline{MN}$.

***Критерии оценивания:***

- оценка «5» – правильно решены две задачи;
- оценка «4» – правильно решена одна из задач, а при решении второй задачи допущены незначительные ошибки;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

**VII. Рефлексия учебной деятельности**

1. Какой угол называется углом между двумя векторами?
2. Что значит «угол между векторами равен нулю»?
3. В каком случае векторы называются перпендикулярными?
4. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов.
5. В каком случае скалярное произведение векторов равно 0? меньше 0? больше 0?
6. Что называют скалярным квадратом?
7. Чему равен скалярный квадрат вектора $a$?

**Домашнее задание**

1. П. 105, 106, вопросы 13–16 (учебник, с. 266, 267).
2. Подготовить сообщение на тему «Применение скалярного произведения в физике».
3. Решить задачи. I уровень сложности: № 1040, 1042 (учебник), № 50, 53 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1040, 1042, 1043, дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

*Дано:* В ромбе $ABCD$ $AD = 10$ см, $AC = 16$ см. На сторонах $AC$ и $BD$ отмечены точки $K$ и $F$ соответственно.

*Найти:* а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{FC}$.

# Урок 35. Скалярное произведение в координатах

***Основные дидактические цели урока:*** доказать теорему о скалярном произведении двух векторов в координатах и ее следствия; познакомить учащихся со свойствами скалярного произведения векторов; показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.

## Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Проверка домашнего задания**

Заслушать сообщение на тему «Применение скалярного произведения в физике».

(Учитель проверяет решение задач № 1042, 1043. Два ученика заранее записывают решение на доске. Решение задач № 50, 53 – индивидуально у нескольких учеников.)

***Задача № 1042***

***Решение:*** В равностороннем треугольнике все углы равны 60° (рис. 11.66).

а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\angle BAC = a \cdot a \cdot \cos 60° = \frac{a^2}{2}$;

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \cos 120° = a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}$;

в) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, так как $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$;

г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = a^2$.

*Ответ:* а) $\frac{a^2}{2}$; б) $-\frac{a^2}{2}$; в) 0; г) $a^2$.

Вопросы для обсуждения к задаче № 1042.

– Докажите, что угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 60°.

– Почему угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ равен не 60°, а 120°?

***Задача № 1043***

*Дано:* $\left|\vec{P}\right| = 8$, $\left|\vec{Q}\right| = 15$, $\angle A = 120°$.

*Найти:* $\left|\vec{R}\right|$.

***Решение:*** В $\Delta PAA_1$ $\angle A_1 = 90°$, $\angle A = 30°$, $PA_1 = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (рис. 11.67). По теореме Пифагора $AA_1 = \sqrt{AP^2 - PA_1^2}$.

Из $\Delta PAA_1F$ по теореме Пифагора $AA_1 = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}$, следовательно, $\sqrt{AP^2 - PA_1^2} = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}$.

$8^2 - 4^2 = AR^2 - 11^2$; $AR^2 = 8^2 + 11^2 - 4^2 = 169 \Rightarrow AR = 13$.

Следовательно, $\left|\vec{R}\right| = 13$.

*Ответ:* $\left|\vec{R}\right| = 13$.

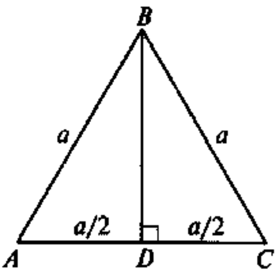



**Рис. 11.66**

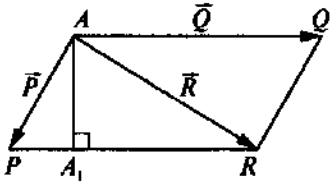



**Рис. 11.67**

Вопросы для обсуждения к задаче № 1043.

– Почему $PA_1 = \frac{1}{2}AP$?

– Как появилось равенство $\sqrt{AP^2 - PA_1^2} = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}$?

– Почему равнодействующая сила равна по модулю длине диагонали $AR$ параллелограмма $PAQR$?

**III. Проверочный тест**

(Задания теста учащиеся выполняют самостоятельно с последующей взаимопроверкой по готовым ответам.)

***Вариант 1***

Рис. 11.68.

**Часть I**

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание.

1) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = ...$;

2) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = ...$;

3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = ...$;

4) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = ...$;

5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = ...$ .

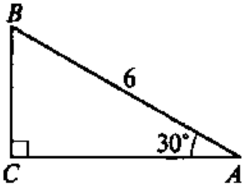


**Рис. 11.68**

**Часть II**

2. Выберите правильный ответ.

6) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = ...$ .

а) 9; б) $9\sqrt{3}$; в) 18.

7) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BA}$:

а) равно нулю;

б) отрицательно;

в) положительно.

8) Скалярное произведение координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ равно:

а) 1; б) –1; в) 0.

9) Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) сонаправлены;

б) перпендикулярны;

в) противоположно направлены.

10) Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} \cdot \vec{n} = -15$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 6$.

а) 50°; б) 60°; в) 120°.

***Вариант 2***

Рис. 11.69.

**Часть I**

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание.

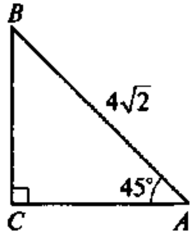



Рис. 11.69

1) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = ...$;

2) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = ...$;

3) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = ...$;

4) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = ...$;

5) $\overrightarrow{AB}^2 = ...$ .

**Часть II**

2. Выберите правильный ответ.

6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = ...$ .

а) 32; б) $16\sqrt{2}$; в) 16.

7) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$:

а) положительно;

б) отрицательно;

в) равно нулю.

8) Скалярный квадрат координатного вектора $\vec{i}$ равен:

а) 1; б) 0; в) –1.

9) Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = -20$, $|\vec{x}| = 4$, $|\vec{y}| = 5$, то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

а) перпендикулярны;

б) противоположно направлены;

в) сонаправлены.

10) Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$.

а) 30°; б) 120°; в) 60°.

Учащиеся обмениваются тетрадями и проверяют ответы друг у друга по ответам, заранее подготовленным на переносной доске в виде следующей таблицы:

*Ответы к тесту:*

| | Часть I | | | | | Часть II | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ***Вариант 1*** | 90° | 150° | 60° | 0 | –36 | а | б | в | а | в |
| ***Вариант 2*** | 90° | 135° | 45° | 0 | 32 | в | а | а | б | в |

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 9–10 баллов;

- оценка «4» – 7–8 баллов;
- оценка «3» – 5–6 баллов;
- оценка «2» – менее 5 баллов.

**IV. Определение темы урока**

Фронтальная работа с классом.

Продолжите утверждение.

а) если $\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c}\{...; ...\}$;

б) если $\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{c}\{...; ...\}$;

в) если $\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}$, $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$, то $\vec{c}\{...; ...\}$;

г) если $\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} ...$ .

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

**V. Работа по теме урока**

1. Фронтальная работа с классом.

*Доказать:* Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

2. Работа в группах.

(Учитель делит класс на две группы. Каждая группа получает задание: доказать одно из следствий теоремы о скалярном произведении векторов. Результаты работы групп заслушиваются всем классом.)

Следствия теоремы о скалярном произведении векторов:

1) $\vec{a}\{x_1; y_1\} \perp \vec{b}\{x_2; y_2\} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$.

2) Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$, то

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

3. Свойства скалярного произведения векторов.

1) Если $\vec{a}^2 \geq 0$, то $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).

4) $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

**VI. Закрепление изученного материала**

1. Работа в парах.

Решить задачи № 55, 57 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

2. Фронтальная работа с классом.

Решить задачу № 1047 (а).

Вопросы для обсуждения.

– Когда два вектора перпендикулярны?
– Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?
– Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в координатах?

3. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1044 (а, в), 1045, 1046, 1047 (а, в).

***Задача № 1044 (а, в)***

а) $\vec{a}\left\{\frac{1}{4};-1\right\}, \vec{b}\{2;3\} \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot 2+(-1)\cdot 3=\frac{1}{2}-3=-2{,}5;$

в) $\vec{a}\{1{,}5;2\}, \vec{b}\{4;-0{,}5\} \Rightarrow 1{,}5\cdot 4+2\cdot(-0{,}5)=6-1=5.$

*Ответ:* а) –2,5; в) 5.

***Задача № 1045***

$\vec{a}\{x;y\}, \vec{b}\{-y;x\} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=x\cdot(-y)+y\cdot x=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}.$

***Задача № 1046***

$\vec{i}\{1;0\}, \vec{j}\{0;1\} \Rightarrow \vec{i}+\vec{j}=\{\bar{1};\bar{1}\}, \vec{i}-\vec{j}=\{\bar{1};-\bar{1}\} \Rightarrow (\vec{i}+\vec{j})\cdot(\vec{i}-\vec{j})=$
$=1\cdot 1+1\cdot(-1)=0.$

Таким образом, $(\vec{i}+\vec{j})$ и $(\vec{i}-\vec{j})$ перпендикулярны.

***Задача № 1047 (а, в)***

$\vec{a}\perp\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ или $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0$, где $\vec{a}\{x_1;y_1\}, \vec{b}\{x_2;y_2\}$.

а) $\vec{a}\{4;5\}, \vec{b}\{x;-6\}, \vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow 4\cdot x+5\cdot(-6)=0 \Rightarrow 4x=30 \Rightarrow x=$
$=7{,}5;$

в) $\vec{a}\{0;-3\}, \vec{b}\{5;x\}, \vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow 0\cdot 5+(-3)\cdot x=0 \Rightarrow x=0.$

*Ответ:* а) 7,5; в) 0.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение теста и за самостоятельное решение задач.)

## VII. Рефлексия учебной деятельности

1. Сформулируйте теорему о скалярном произведении векторов и ее следствия.
2. Сформулируйте свойства скалярного произведения векторов.

**Домашнее задание**

1. П. 107, 108, вопросы 17–20 (учебник, с. 267).
2. Решить задачи № 1044 (б), 1047 (б) (учебник), № 54, 56 (рабочая тетрадь).

## Урок 36. Применение скалярного произведения векторов при решении задач

***Основная дидактическая цель урока:*** показать примеры решения задач на применение скалярного произведения векторов; закрепить теоретический материал изучаемой темы.

### Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 54, 56. Один ученик вслух читает задачу и ее решение, остальные его слушают. Затем ученики задают ему 4–5 вопросов по изучаемой теме. Если ученик не может ответить на поставленный вопрос, учитель переадресовывает вопрос другому учащемуся.)

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проверки домашнего задания.)

**I уровень сложности**

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$, $AC = 6$, $AB = 3$.

Найдите:

а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$.

2. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\vec{a}\{2; -3\}$ и $\vec{b}\left\{-2; \dfrac{1}{3}\right\}$;

б) $\vec{i}$ и $\vec{c}$ $\{4; 0\}$.

**II уровень сложности**

1. В треугольнике $MNK$ $MN = NK$, $NE$ – биссектриса, $F \in NE$, $NE = 5$, $MN = 10$.

Найдите:

а) $\overline{MN} \cdot \overline{MK}$;

б) $\overline{MK} \cdot \overline{FN} + \overline{KP}$;

в) $\overline{NE} \cdot \overline{KN}$.

2. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}\{3; -4\}$ и $\vec{b}\{-2; 0\}$;

б) $\vec{i} - \vec{j}$ и $2\vec{i} + 3\vec{j}$, если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

**III уровень сложности**

1. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$, $AD$ и $BC$ — основания, $BC = 6$, $AD = 10$, $\angle CAD = 30°$.

Найдите:

а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

2. При каком значении $x$ векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ перпендикулярны, если известно, что $A(x; 3)$, $B(1; 1)$, $C(-2; 4)$?

3. Решить задачи (устно).

*Дано:* $\vec{a}\{3; -4\}$, $\vec{b}\{-2; 1\}$, $\vec{c}\{-2; -1{,}5\}$.

а) Найдите: $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$; $\vec{c} \cdot \vec{a}$.

б) Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{c}$ и $\vec{a}$?

в) Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{a}$ и $\vec{c}$?

г) Найдите абсциссу вектора $\vec{d}$, если известно, что его ордината равна 4 и $\vec{d} \perp \vec{b}$.

д) Найдите $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$.

**III. Решение задач**

1. Работа в парах.

Решить задачи № 58, 60 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

Вопросы для обсуждения.

– Какая формула используется для вычисления косинуса угла между векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$?

– Какие свойства скалярного произведения векторов вам известны?

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1048, 1051, 1053 с последуюшей проверкой.

***Задача № 1048***

*Решение:*

Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, то $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

1) $\overrightarrow{AB}\{-1-2;\ 5-8\} = \overrightarrow{AB}\{-3;\ -3\}$; $\overrightarrow{AC}\{3-2;\ 1-8\} = \overrightarrow{AC}\{1;\ -7\}$;

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-3\cdot 1 + (-3)\cdot(-7)}{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-7)^2}} = \frac{3}{5}.$$

2) $\overrightarrow{BA}\{3;\ 3\}$; $\overrightarrow{BC}\{3+1;\ 1-5\} = \overrightarrow{BC}\{4;\ -4\}$;

$$\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{3\cdot 4 + 3\cdot(-4)}{\sqrt{3^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-4)^2}} = 0.$$

3) $\overrightarrow{CA}\{-1;\ 7\}$, $\overrightarrow{CB}\{-4;\ 4\}$;

$$\cos C = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{-1\cdot(-4) + 7\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2+7^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+4^2}} = \frac{4+28}{5\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{4}{5}.$$

*Ответ:* $\cos A = \frac{3}{5}$; $\cos B = 0$; $\cos C = \frac{4}{5}$.

***Задача № 1051***

*Решение:* $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}) + |\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\times$ $\times\cos(\vec{b},\vec{c}) = 1\cdot 2\cdot\cos 60° + 2\cdot 2\cdot\cos 60° = 1 + 2 = 3.$

*Ответ:* 3.

***Задача № 1053***

*Решение:* Так как $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы, то $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1, (\vec{p},\vec{q}) = 90°$.

Следовательно, $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\vec{p}-2\vec{q})(\vec{p}+4\vec{q}) = 3\vec{p}^2 - 2\vec{p}\vec{q} + 12\vec{p}\vec{q} - 8\vec{q}^2 = 3\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 90° + 12\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 90° - 8 = -5.$

*Ответ:* –5.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

3. Самостоятельное решение задач.

Разобрать решение задачи № 1054.

## IV. Рефлексия учебной деятельности

Приведите примеры применения теории скалярного произведения векторов при решении задач.

## Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 1049, 1050, 1052 (учебник), № 59 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1049, 1050, 1052, 1055.

# Урок 37. Подготовка к контрольной работе по теме «Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов»

***Основные дидактические цели урока:*** закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки; подготовить учащихся к контрольной работе; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задачи № 1049. Один ученик заранее записывает решение на доске. Решение задачи № 59 – индивидуально у нескольких учеников.)

***Задача № 1049***

*Решение:* $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}}$, при $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$.

1) $\cos A = \cos(\overline{AB}, \overline{AC})$; $\overline{AB}\{1+1; -\sqrt{3}-\sqrt{3}\} = \overline{AB}\{2; -2\sqrt{3}\}$; $\overline{AC}\left\{\dfrac{1}{2}+1;\ \sqrt{3}-\sqrt{3}\right\} = \overline{AC}\{1{,}5;\ 0\}$.

$\cos A = \dfrac{2\cdot 1{,}5 - 2\sqrt{3}\cdot 0}{\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{1{,}5^2+0^2}} = \dfrac{3}{4\cdot 1{,}5} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\angle A = 60°$.

2) $\cos B = \cos(\overline{BA}, \overline{BC})$; $\overline{BA}\{-2; 2\sqrt{3}\}$; $\overline{BC}\left\{\dfrac{1}{2}-1;\ \sqrt{3}+\sqrt{3}\right\} = \overline{BC}\{-0{,}5;\ 2\sqrt{3}\}$.

$\cos B = \dfrac{-2\cdot(-0{,}5) + 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{(-0{,}5)^2+(2\sqrt{3})^2}} = \dfrac{1+12}{4\cdot 3{,}5} = \dfrac{13}{14}$. Следовательно, $\angle B \approx 21°47'$.

3) $\angle C = 180° - (\angle A - \angle B) \approx 180° - (60° + 21°47') = 98°13'$.

*Ответ:* $\angle A = 60°$; $\angle B \approx 21°47'$; $\angle C \approx 98°13'$.

3. Обсуждение решения задачи № 1055.

Вопросы для обсуждения.

– Почему $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA} = \vec{a} - 2\vec{b}$?

– Почему $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB} = \vec{b} - 2\vec{a}$?

– Почему $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$?

– Как из равенства $0 = 5a^2\cos C - 4a^2$ получили равенство $\cos C = \dfrac{4}{5}$?

## III. Математический диктант

(Задания диктанта учащиеся выполняют самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справилось большинство учащихся.)

***Вариант 1***

1. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $\angle A = 45°$, $AB = 4$, $AC = 7$.

2. В равнобедренном треугольнике $ABC$ длина основания $AB$ равна $\sqrt{2}$, угол при основании равен 30°. Найдите периметр треугольника.

3. Стороны треугольника равны 4, 5 и 6. Найдите косинус угла, лежащего против меньшей стороны.

4. В треугольнике $ABC$ $\angle B = 90°$, $AB = BC$, $BD$ – медиана треугольника, $AC = 2\sqrt{2}$. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD}$.

5. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a}\{3; -4\}$ и $\vec{b}\{15; 8\}$.

6. Найдите значение $x$, если известно, что $\vec{a}\{2; -3\}$ и $\vec{b}\{x; -4\}$ перпендикулярны.

7. Найдите высоту $BD$ треугольника $ABC$, если $AB = 4$, $BC = 6$, $\angle ABC = 60°$.

***Вариант 2***

1. Найдите площадь треугольника $CDE$, если $\angle C = 60°$, $CD = 6$, $CE = 8$.

2. В равнобедренном треугольнике $MNK$ боковая сторона равна $\sqrt{3}$, угол при вершине равен 120°. Найдите периметр треугольника.

3. Стороны треугольника равны 6, 7 и 8. Найдите косинус угла, лежащего против большей стороны.

4. В треугольнике $MNK$ $NP$ – биссектриса, $MN = 2$, $MN = NK$, $\angle N = 60°$. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MK}$; б) $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NK}$; в) $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{MK}$.

5. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a}\{-4; 5\}$ и $\vec{b}\{5; -4\}$.

6. Найдите значение $y$, если известно, что $\vec{a}\{3; y\}$ и $\vec{b}\{2; -6\}$ перпендикулярны.

7. Найдите высоту $MN$ треугольника $PMK$, если $PM = 3$, $MK = 4$, $\angle PMK = 120°$.

*Ответы к математическому диктанту:*

***Вариант 1***

1. $7\sqrt{2}$. 2. $\dfrac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$. 3. $\dfrac{3}{4}$. 4. а) 0; б) 2; в) 2. 5. $\dfrac{13}{85}$. 6. $-6$. 7. $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

***Вариант 2***

1. $12\sqrt{3}$. 2. $3+\sqrt{3}$. 3. $\dfrac{1}{4}$. 4. а) 0; б) 3; в) $-4$. 5. $-\dfrac{40}{41}$. 6. 1. 7. $\dfrac{6\sqrt{111}}{37}$.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» — 6–7 баллов;
- оценка «4» — 5 баллов;
- оценка «3» — 3–4 балла;
- оценка «2» — менее 3 баллов.

## IV. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой

*I уровень сложности:* задачи № 1065, 1066, 1069, 1071.

*II уровень сложности:* задачи № 1067, 1068, 1070–1072.

***Задача № 1065***

*Дано:* $A(3; 0)$, $B(1; 5)$, $C(2; 1)$.

*Доказать:* $\Delta ABC$ — тупоугольный.

*Найти:* Косинус тупого угла.

*Доказательство:* Найдем стороны треугольника $ABC$ (рис. 11.70).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{29}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{17}.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

По теореме косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos\angle C$.

Следовательно, $\cos\angle C = \dfrac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \dfrac{17+2-29}{2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$.

Так как $\cos\angle C < 0$, то $\angle C$ тупой, т. е. $\Delta ABC$ — тупоугольный.

***Задача № 1066***

*Дано:* $3\vec{i} - 4\vec{j} = \vec{a}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

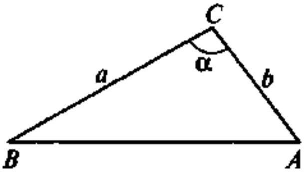



Рис. 11.70

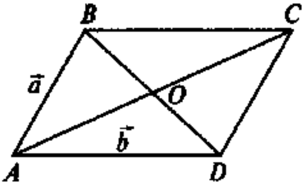



Рис. 11.71

*Найти:* $|\vec{a}|$.

*Решение:* Так как $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, то $\vec{a}\{3; -4\}$.

Отсюда, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

*Ответ:* $|\vec{a}| = 5$.

***Задача № 1067***

*Дано:* $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = 45°$.

*Найти:* ***AC***, ***BD*** (рис. 11.71).

*Решение:* $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{p} - 3\vec{q} = 6\vec{p} - \vec{q}$.

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(6p)^2 + q^2 - 12p \cdot q \cdot \cos 45°} = \sqrt{288 + 9 - 12 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$= 15$.

$\overline{BD} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} - 5\vec{p} - 2\vec{q} = -4\vec{p} - 5\vec{q}$.

$$\left|\overline{BD}\right| = \sqrt{16p^2 + 25q^2 + 40p \cdot q \cdot \cos 45°} =$$

$$= \sqrt{16 \cdot 8 + 25 \cdot 9 + 40 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{128 + 225 + 240} = \sqrt{593} \approx 23{,}4.$$

*Ответ:* $AC = 15$; $BD \approx 23{,}4$.

***Задача № 1068***

*Дано:*

$|\vec{a}| = 2$; $\left|\vec{b}\right| = 5$; $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. $\vec{p} = x\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{p} \perp \vec{q}$.

*Найти:* $x$.

*Решение:* $\vec{p} \cdot \vec{q} = (x\vec{a} + 17\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3x\vec{a}^2 - x\vec{a}\vec{b} + 51\vec{a}\vec{b} - 17\vec{b}^2$.

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4$; $\vec{b}^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = 25$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos 120° = -5$.

$\vec{p} \cdot \vec{q} = 3 \cdot x \cdot 4 - x \cdot (-5) + 51 \cdot (-5) - 17 \cdot 25 = 17x - 680$.

Так как $\vec{p} \perp \vec{q}$, то $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, т. е. $17x - 680 = 0$, откуда $x = 40$.

*Ответ:* $x = 40$.

***Задача № 1069***

*Дано:* $\Delta ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = CB$, $AA_1$, $BB_1$ – медианы.

*Найти:* $\angle BOA_1$.

*Решение:* Пусть $BC = AC = 2a$ (рис. 11.72).

Из $\Delta BCB_1$ по теореме Пифагора $BB_1^2 = BC^2 + CB_1^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow BB_1 = a\sqrt{5}$; $AA_1 = a\sqrt{5}$.

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = (\overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Так как $CB \perp CA$ ($\angle C = 90°$), то $\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0$, $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

Отсюда, $\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA_1} = \left(\left|\overrightarrow{CB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \cos 0° + \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA_1}\right| \cdot \cos 0°\right) = -(a \cdot 2a + 2a \cdot a) = -4a^2$.

$\cos\angle AOB = \dfrac{\left|\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AA_1}\right|} = \dfrac{\left|-4a^2\right|}{a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5}} = 0{,}8$, следовательно, $\angle AOB \approx 36°51'$.

*Ответ:* $\approx 36°51'$.

***Задача № 1070***

*Дано:* $ABCD$ – трапеция, $AD = 16$ см, $BC = 8$ см, $CD = 4\sqrt{7}$ см, $\angle ADC = 60°$, $S_{ABCC_1} = S_{CC_1D}$.

*Найти:* $S_{ABCD}$, $CC_1$.

*Решение:* Из $\Delta CDH$ ($\angle H = 90°$) $\sin 60° = \dfrac{CH}{CD} = \dfrac{CH}{4\sqrt{7}}$ (рис. 11.73),

следовательно, $CH = 4\sqrt{7} \cdot \sin 60° = \dfrac{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{21}$.

Тогда $S_{ABCD} = CH(AD + BC) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot (16 + 8) = 24\sqrt{21}$, следовательно, $S_{ABCC_1} = S_{CC_1D} = 12\sqrt{21}$.

Из $\Delta CC_1D = \dfrac{1}{2}CH \cdot C_1D = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot C_1D = 12\sqrt{21}$, следовательно, $C_1D = \dfrac{12\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = 12$.

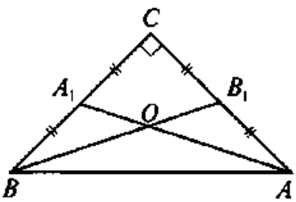



Рис. 11.72

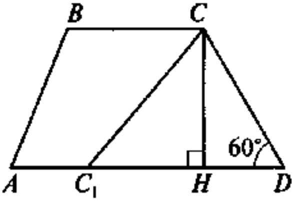



Рис. 11.73

По теореме косинусов $CC_1^2 = CD^2 + C_1D^2 - 2 \cdot CD \cdot C_1D \times \times \cos\angle CDC_1 = (4\sqrt{7})^2 + 12^2 - 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 12 \cdot \cos 60° = 112 + 144 - - 48\sqrt{7} = 256 - 48\sqrt{7}$.

Тогда $CC_1 = \sqrt{256 - 48\sqrt{7}} = \sqrt{16(16 - 3\sqrt{7})} = 4\sqrt{16 - 3\sqrt{7}}$.

*Ответ:* $S_{ABCD} = 24\sqrt{21}$; $CC_1 = 4\sqrt{16 - 3\sqrt{7}}$.

***Задача № 1071***

*Дано:* $\Delta ABC$, $S_{ABC} = 3\sqrt{3}$, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 3$, $\angle A$ — острый.

*Найти:* Радиус описанной окружности.

*Решение:* $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin\angle A = 3\sqrt{3}$, тогда $\sin\angle A = \frac{1}{2}$, $\angle A = 30°$ (рис. 11.74).

По теореме косинусов $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\angle A = = 9 + 48 - 2 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 30° = 57 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 57 - 36 = 21$. $CB = \sqrt{21}$.

По теореме синусов $\frac{CB}{\sin A} = 2R$, тогда $\frac{\sqrt{21}}{\sin 30°} = 21 : \frac{1}{2} = 2\sqrt{21} = = 2R \Rightarrow R = \sqrt{21}$.

*Ответ:* $R = \sqrt{21}$.

***Задача № 1072***

*Дано:* $MNPQ$ — ромб, $MF$ — биссектриса $\angle PMQ$, $\angle NMQ = 4\alpha$, $FQ = a$.

*Найти:* $S_{MNPQ}$.

*Решение:* $\angle NMQ = 4\alpha$, $MP$ — биссектриса $\angle NMQ$, $MF$ — биссектриса $\angle PMQ$ (рис. 11.75).

Тогда $\angle FMQ = \angle FMP = \alpha$, $\angle QMP = 2\alpha$, $\angle MQF = 180° - 4\alpha$.

Из $\Delta MFQ$ по теореме синусов $\frac{FQ}{\sin\angle FMQ} = \frac{MF}{\sin\angle MQF}$, следовательно, $MF = \frac{FQ \cdot \sin\angle MQF}{\sin\angle FMQ} = \frac{a \cdot \sin(180° - 4\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \sin 4\alpha}{\sin\alpha}$.

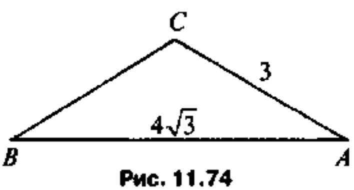


Рис. 11.74

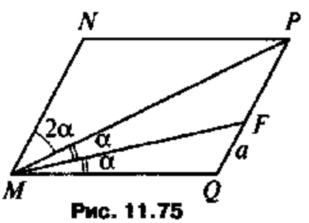


Рис. 11.75

Из $\Delta MPQ$ по теореме синусов $\dfrac{MF}{\sin\angle QMP} = \dfrac{FP}{\sin\angle PMF}$, следовательно, $FP = \dfrac{MF\cdot\sin\angle PMF}{\sin\angle QMP} = \dfrac{MF\cdot\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{\dfrac{a\cdot\sin 4\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha}{\sin 2\alpha} =$

$= \dfrac{a\cdot\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{a\cdot 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2a\cos 2\alpha.$

$PQ = PF + FQ = 2a\cos 2\alpha + a = a(2\cos 2\alpha + 1).$

$S_{MNPQ} = PQ^2\cdot\sin 4\alpha = a^2(4\cos^2 2\alpha + 1 + 4\cos 2\alpha)\cdot\sin 4\alpha.$

*Ответ:* $S_{MNPQ} = a^2\sin 4\alpha(4\cos^2 2\alpha + 1 + 4\cos 2\alpha).$

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение математического диктанта и за самостоятельное решение задач.)

### V. Рефлексия учебной деятельности

Обсуждение принципа решения задач, при решении которых у учащихся возникли затруднения.

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 1–4; II уровень сложности: № 3–6.

***Задача 1.*** Решите $\Delta MNK$, если $\angle N = 30°$, $\angle K = 105°$, $NK = 3\sqrt{2}$.

***Задача 2.*** Найдите косинусы углов треугольника $ABC$, если $A(1;\ 7)$, $B(-2;\ 4)$, $C(2;\ 0)$.

***Задача 3.*** Две стороны треугольника равны 4 см и 7 см, а косинус угла между ними равен $-\dfrac{2}{7}$. Определите синусы всех углов данного треугольника и его третью сторону.

***Задача 4.*** $ABCD$ – ромб, $AB = 6$, $\angle A = 60°$.

*Найти:* а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$; в) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$.

***Задача 5.*** *Дано:* Два перпендикулярных отрезка $EK$ и $PM$, $E(-3;\ 1)$, $K(1;\ 4)$, $M(2;\ 1)$, $P(-4;\ a)$.

*Найти:* а) значение $a$; б) угол между прямыми $PE$ и $EK$.

***Задача 6.*** *Дано:* $\vec{m}\perp\vec{k}$, $\vec{k}\{2;\ -1\}$, $|\vec{m}| = \sqrt{80}$, а угол между вектором $\vec{m}$ и осью $Oy$ тупой.

*Найти:* Координаты вектора $\vec{m}$.

# Урок 38. Контрольная работа № 3 по теме «Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов»

***Основная дидактическая цель урока:*** проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов».

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Контрольная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$, $BC = 3\sqrt{2}$. Найдите $AC$.

2. Две стороны треугольника равны 7 см и 8 см, а угол между ними равен 120°. Найдите третью сторону треугольника.

3. Определите вид треугольника $ABC$, если $A(3; 9)$, $B(0; 6)$, $C(4; 2)$.

4.* В треугольнике $ABC$ $AB = BC$, $\angle CAB = 30°$, $AE$ – биссектриса, $BE = 8$ см. Найдите площадь треугольника $ABC$.

***Вариант 1***

1. В треугольнике $CDE$ $\angle C = 30°$, $\angle D = 45°$, $CE = 5\sqrt{2}$. Найдите $DE$.

2. Две стороны треугольника равны 5 см и 7 см, а угол между ними равен 60°. Найдите третью сторону треугольника.

3. Определите вид треугольника $ABC$, если $A(3; 9)$, $B(0; 6)$, $C(4; 2)$.

4.*В ромбе $ABCD$ $AK$ – биссектриса угла $CAB$, $\angle BAD = 60°$, $BK = 12$ см. Найдите площадь ромба.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. В треугольнике $ABC$ $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, а его площадь равна $12\sqrt{2}$ см$^2$. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что угол $A$ – тупой.

2. В треугольнике $MNK$ $\angle M = \alpha$, $\angle N = \beta$, $NK = a$. Определите стороны треугольника и его площадь.

3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$ см, $AD = 5\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$. Найдите диагонали параллелограмма.

4. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(2; -2)$, $D(-2; -1)$. Найдите синус угла между его диагоналями.

***Вариант 2***

1. В треугольнике $ABC$ $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, а его площадь равна $5\sqrt{3}$ см$^2$. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что угол $B$ — острый.

2. В треугольнике $KME$ $\angle K = \alpha$, $\angle M = \beta$, $ME = b$. Найдите стороны треугольника и его площадь.

3. В параллелограмме $MNKP$ $MN = 8$ см, $MP = 7\sqrt{3}$ см, $\angle M = 30°$. Найдите диагонали параллелограмма.

4. Четырехугольник $MNKP$ задан координатами своих вершин $M(5; -3)$, $N(1; 2)$, $K(4; 4)$, $P(6; 1)$. Найдите синус угла между его диагоналями.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $\angle ABC = 100°$, $E$ — середина $BC$, $\angle EAD = 30°$. Найдите площадь параллелограмма и радиус описанной около треугольника $ABE$ окружности.

2. Даны точки $A(-1; 4)$, $B(1; -2)$, $C(0; -4)$, $D(2; 2)$, $E$ и $F$ — середины $AB$ и $CD$ соответственно. Найдите угол между прямыми $EF$ и $CD$. Вычислите $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD}$.

3. Точка $M$ лежит внутри угла, равного $\alpha$, на расстоянии $a$ и $b$ от сторон этого угла. Определите расстояние от точки $M$ до вершины угла.

4.* Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}| = \sqrt{10}$, $\vec{b}\{1; -3\}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ и угол между $\vec{a}$ и осью $Ox$ острый.

***Вариант 2***

1. В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ угол $A$ равен 65°. Через сторону $AB$ проведена прямая, пересекающая $BC$ в точке $K$, $\angle KEB = 20°$. Найдите площадь треугольника $BEK$ и радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности, если $BK = 5$.

2. Даны два отрезка $EK$ и $PM$, причем $EK \perp PM$, $E(-3; 1)$, $K(1; 4)$, $M(2; 1)$, $P(-4; 0)$. Найдите острый угол между прямыми $PE$ и $EK$. Вычислите $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{KP}$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90°$, $AC = m$, $DC = n$, $\angle ABD = \alpha$. Найдите диагональ $BD$.

4. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $\vec{m} \perp \vec{k}$, $\vec{k}\{2; -1\}$, $|\vec{m}| = 4\sqrt{5}$ и угол между вектором $\vec{m}$ и осью $Oy$ тупой.

***Ответы к задачам контрольной работы:***

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $AC = 3\sqrt{3}$.
2. 13 см.
3. Прямоугольный.
4. $\approx 75{,}7$ см$^2$.

***Вариант 2***

1. $DE = 5$.
2. $\sqrt{39}$ см.
3. Прямоугольный.
4. $\approx 930{,}97$ см$^2$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $2\sqrt{25 + 12\sqrt{2}}$ см.
2. $MN = \dfrac{a\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}, MK = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, S = \dfrac{a^2\sin(\alpha + \beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$.
3. $BD = \sqrt{26}$ см, $AC = \sqrt{106}$ см.
4. $\dfrac{9}{\sqrt{82}}$.

***Вариант 2***

1. $\sqrt{21}$см.
2. $KM = \dfrac{b\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}, KE = \dfrac{b\sin\beta}{\sin\alpha}, S = \dfrac{b^2\sin(\alpha + \beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$.
3. $NP = \sqrt{43}$ см, $MN = \sqrt{379}$ см.
4. $\dfrac{17}{5\sqrt{13}}$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $S \approx 75{,}4$; $R = 5$.
2. 45°; –40.
3. $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.
4. $\vec{a}\{3; 1\}$.

***Вариант 2***

1. $S \approx 26{,}3$; $R \approx 15{,}1$.
2. $\approx 60°$; 0.
3. $\dfrac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.
4. $\dfrac{3}{8}\{-2; -4\}$.

## III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту ответы к задачам контрольной работы.

## Домашнее задание

Решить контрольную работу следующего уровня сложности.

# Глава XII
# ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

***Формируемые УУД: предметные:*** расширить и систематизировать знания учащихся об окружностях и многоугольниках; ввести понятие правильного многоугольника; рассмотреть теоремы об описанной и вписанной в правильный многоугольник окружностях; вывести формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны, радиусов вписанных и описанных окружностей, длины окружности и площади круга; отработать навыки решения задач на вычисление площадей и сторон правильных многоугольников, радиусов вписанных и описанных окружностей, длины дуги окружности и площади круга, кругового сектора; научить решать задачи на построение правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал; извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

# Урок 39. Правильный многоугольник

***Основные дидактические цели урока:*** повторить формулы суммы углов выпуклого многоугольника, свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку, теоремы об окружностях, вписанной и описанной около треугольника, признаки равнобедренного треугольника, свойства касательной к окружности; ввести понятие правильного многоугольника; вывести формулу для вычисления угла правильного $n$-угольника и показать ее применение в процессе решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

Решить задачи.

*I уровень сложности:* устное решение задач с подробным обсуждением хода решения.

(Учитель особое внимание уделяет повторению теории, необходимой для решения задач).

*II уровень сложности:* самостоятельное решение задач.

(Задачи решают наиболее подготовленные ученики. По окончании работы учащиеся сдают тетради на проверку.)

**I уровень сложности**

1. Найти сумму углов правильного восьмиугольника.

2. Все углы выпуклого шестиугольника равны. Найдите величину одного угла.

3. $BE$ – биссектриса угла $ABC$, точка $E$ удалена от стороны $BC$ на расстояние, равное 5 см (рис. 12.1). Найдите расстояние от точки $E$ до стороны $AB$.

4. В треугольнике $ABC$ серединный перпендикуляр $MN$ к стороне $AC$ равен ее половине (рис. 12.2). Докажите, что $AB > MC$.

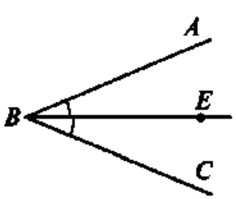



**Рис. 12.1**

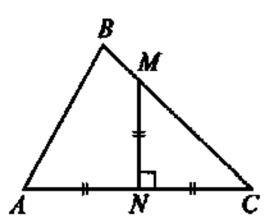



**Рис. 12.2**

5. Вычислите радиусы вписанной и описанной около треугольника окружностей, если известно, что стороны треугольника равны 5, 6 и 7 см.

**II уровень сложности**

1. Вычислите углы выпуклого семиугольника, если известно, что четыре его угла пропорциональны числам 1, 2, 3 и 4, а каждый из оставшихся трех на 40° больше меньшего из них.

*Ответ:* 60°; 120°; 180°; 240°; 100°; 100°; 100°.

2. Во внутренней области треугольника $ABC$ взята точка $O$, равноудаленная от его сторон. Найдите угол $AOC$, если $\angle ABO = 39°$.

*Ответ:* 129°.

3. В треугольнике $ABC$ медианы $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $O$ и взаимно перпендикулярны. Найдите $OA$, если $BB_1 = 36$ см, $CC_1 = 15$ см.

*Ответ:* 26 см.

4. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а проведенная к нему высота равна 12 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.

*Ответ:* 4,5 см и $9\frac{3}{8}$ см.

## III. Определение темы урока

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## IV. Изучение нового материала

1. Фронтальная работа с классом.

Ввести понятие правильного многоугольника.

*Определение:* Выпуклый многоугольник называется правильным, если все его углы равны и все его стороны равны.

Вопросы для обсуждения.

– Какой треугольник является правильным? Почему?

*Ответ:* Равносторонний, так как все его стороны равны и все его углы равны.

– Является ли правильным четырехугольником прямоугольник? ромб? квадрат? Почему?

(При обсуждении ответов на данный вопрос учитель обращает внимание учащихся на следующие моменты.)

1) Хотя в прямоугольнике все углы равны, он не является правильным, так как не все его стороны равны (т. е. одно из условий правильного многоугольника не выполняется).

2) В ромбе все стороны равны, но не все углы равны.

3) Квадрат – правильный многоугольник, так как, во-первых, все его стороны равны, во-вторых, все его углы равны (т. е. выполняются оба условия из определения правильного многоугольника).

2. Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы по 3–4 ученика. Каждая группа получает одну из задач и решает ее 3–5 мин.)

***Задача.*** Чему равен каждый из углов правильного а) десятиугольника; б) $n$-угольника?

3. Обсуждение решения задачи.

(По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс, выявляется наиболее рациональный способ решения.)

Возможные варианты решений.

1) Сумма углов выпуклого десятиугольника равна $180° \cdot (10 - 2) = 1440°$. Так как все углы правильного десятиугольника равны, то каждый из них равен $1440° : 10 = 144°$.

2) Сумма углов выпуклого $n$-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$. Так как все $n$ углов правильного $n$-угольника равны, то каждый из них равен $\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$.

На доске и в тетрадях запись:

*Формула для вычисления угла правильного n-угольника:*

$$\alpha = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}.$$

**V. Закрепление изученного материала**

1. Работа в парах.

Разобрать решение задачи № 64 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

*Ответ:* а) 6; б) 72.

2. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

*I уровень сложности:* задачи № 1081 (б, д), 1083 (а, в) (учебник), № 63 (рабочая тетрадь).

*II уровень сложности:* задачи № 1081 (д), 1083 (в), 1082 (учебник), дополнительные задачи № 1, 2.

(Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь, контролирует правильность решения задач менее подготовленными учащимися.)

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** Докажите, что в правильном пятиугольнике диагонали, выходящие из одной вершины, делят угол при данной вершине на три равные части.

***Задача 2.*** *ABCDEF* – правильный шестиугольник, его площадь равна 60 см$^2$. Найдите площади треугольников *ABC* и *ACD*.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – не ставится.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой многоугольник называется правильным?
2. Какой треугольник (четырехугольник) является правильным? Ответ обоснуйте.
3. Чему равен угол правильного многоугольника?

### Домашнее задание

1. П. 109, вопросы 1, 2 (учебник, с. 284).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1081 (в, г), 1083 (б, г) (учебник), № 61, 62 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1081 (в, г), 1083 (б, г), дополнительную задачу.

*Дополнительная задача*

От каждой вершины квадрата на его сторонах отложены отрезки, делящие сторону квадрата в отношении $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{2}$. Определите вид полученного восьмиугольника.

## Урок 40. Окружность, описанная около правильного многоугольника и вписанная в правильный многоугольник

***Основные дидактические цели урока:*** повторить понятия окружности, вписанной в многоугольник и описанной около него; доказать теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

1) Какой многоугольник называется правильным?
2) Выведите формулу для вычисления угла правильного *n*-угольника.

3) Чему равна сумма внешних углов правильного многоугольника, взятых по одному при каждой вершине?
4) Выведите формулу для вычисления внешнего угла правильного $n$-угольника.

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проведения устного теоретического опроса. Учитель беседует с группой учащихся (3–4 ученика) по вопросам задач № 1078, 1079, 1080 учебника.)

**I уровень сложности**

1) Найдите углы правильного двенадцатиугольника.

2) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен 144°?

3) Найдите внешний угол правильного пятнадцатиугольника.

**II уровень сложности**

1) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его внешний угол в два раза меньше внутреннего?

2) Докажите, что четыре вершины правильного восьмиугольника, взятые через одну, служат вершинами квадрата.

3) Площадь правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см². Найдите его периметр.

**III уровень сложности**

1) Докажите, что в правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагональ $AC$ делит его на две фигуры, площади которых пропорциональны числам 1 и 5.

2) Три вершины правильного шестиугольника, взятые через одну, служат вершинами треугольника. Найдите отношение периметров данного шестиугольника и получившегося треугольника.

3) Можно ли покрыть плоскость правильными треугольниками и правильными шестиугольниками без просветов? Ответ обоснуйте.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

3. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

(Рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

1) Найдите углы правильного шестнадцатиугольника.
2) Каждый угол правильного многоугольника равен 162°. Найдите число его сторон.

3) Чему равен внешний угол правильного восемнадцатиугольника?
4) Внешний угол правильного многоугольника равен 15°. Найдите число его сторон.
5) Является ли равнобедренный треугольник с углом при вершине в 60° правильным? Ответ обоснуйте.
6) Является ли ромб с равными диагоналями правильным четырехугольником? Ответ обоснуйте.
7) Диагональ $AD$ делит шестиугольник $ABCDEF$ на две равновеликие трапеции. Является ли $ABCDEF$ правильным шестиугольником? Ответ обоснуйте.
8) В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ проведены диагонали $AC$, $AD$, $AE$. Найдите площади получившихся треугольников, если площадь шестиугольника равна 42 см$^2$.

*Ответы к задачам для самостоятельного решения:*

1) 157,5°. 2) 20. 3) 20°. 4) 24°. 5) Да. 6) Да. 7) Не всегда. 8) 7 см$^2$; 14 см$^2$; 14 см$^2$; 7 см$^2$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены семь-восемь задач;
- оценка «4» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «3» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее трех задач.

## III. Определение темы урока

Фронтальная работа с классом.

Решить задачи.

*Задача 1.* Около прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см описана окружность. Найдите радиус окружности.

*Задача 2.* В правильный шестиугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите радиус окружности.

*Задача 3.* Можно ли вписать окружность в правильный пятиугольник?

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## IV. Изучение нового материала

1. Ввести понятие окружности, описанной около многоугольника.

Вопросы для обсуждения.

– Какая окружность называется описанной около многоугольника?

*Ответ:* Окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности.

– Можно ли описать окружность около произвольного треугольника? произвольного четырехугольника?

*Ответ:* Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Около четырехугольника можно описать окружность, если сумма его противоположных углов равна 180°.

– Приведите примеры четырехугольников, около которых можно описать окружность.

*Ответ:* Окружность можно описать около прямоугольника, квадрата, равнобедренной трапеции и всех других четырехугольников, в которых сумма противоположных углов равна 180°.

– Можно ли описать окружность около выпуклого многоугольника? правильного многоугольника?

(Ответы на данный вопрос могут быть самыми разнообразными, причем вряд ли кто-либо из учащихся сможет обосновать свой ответ.)

***Вывод.*** Оказывается, не всегда удается описать окружность около любого выпуклого многоугольника. А вот около правильного многоугольника всегда можно описать окружность, и притом только одну.

2. Доказательство теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника.

***Теорема:*** Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

*Дано:* $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – правильный многоугольник (рис. 12.3).

*Доказать:*

1) около $A_1A_2A_3 \dots A_n$ можно описать окружность;

2) описанная окружность единственная.

(Доказательство проводится в форме обсуждения вопросов учителя.)

– Предположим, что около данного многоугольника можно описать окружность. Где может находиться центр данной окружности?

*Возможные ответы:* а) В точке пересечения биссектрис углов многоугольника. б) В точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам данного многоугольника.

– Совпадут ли точки пересечения биссектрис и точки пересечения серединных перпендикуляров?

*Ответ:* Да.

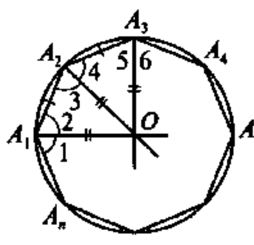



Рис. 12.3

– Проведем биссектрисы углов $A_1$ и $A_2$. Что можно сказать о получившемся треугольнике $A_1OA_2$, если $O$ – точка пересечения биссектрис?

*Ответ:* $\angle 2 = \angle 3$, так как $\angle A_1 = \angle A_2$ как углы правильного многоугольника, $A_1O$ и $A_2O$ их биссектрисы, следовательно, $\Delta A_1OA_2$ – равнобедренный, т. е. $OA_1 = OA_2$.

– Если соединить точку $A_3$ с точкой $O$, будут ли равны отрезки $OA_3$, $OA_2$?

*Ответ:* $OA_3 = OA_2$, потому что $\Delta A_1A_2O = \Delta A_3A_2O$ по двум сторонам и углу между ними, так как $A_1A_2 = A_2A_3$, $OA_2$ – общая сторона, $\angle 3 = \angle 4$.

– Можно ли утверждать, что $A_3O$ также является биссектрисой данного многоугольника?

*Ответ:* Да, так как $OA_3 = OA_2$, тогда $\Delta A_2OA_3$ равнобедренный, поэтому $\angle 5 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle A_2 = \frac{1}{2}\angle A_3$, следовательно, $\angle 6 = \frac{1}{2}\angle A_3$, т. е. $A_3O$ – биссектриса угла $A_3$.

– Как расположена точка по отношению к вершинам многоугольника?

*Ответ:* Если продолжить соединять точки $A_4$, $A_5$, ..., $A_n$ с точкой $O$, то получим $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n$, т. е. точка $O$ равноудалена от вершин многоугольника и является центром описанной около него окружности.

***Вывод.*** Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

– Сколько таких окружностей можно описать около многоугольника? Ответ обоснуйте.

*Ответ:* Возьмем три вершины многоугольника (например, $A_1$, $A_2$, $A_3$). Через эти точки проходит только одна окружность, поэтому и около данного многоугольника можно описать только одну окружность.

***Вывод.*** Около любого правильного многоугольника можно описать только одну окружность.

3. Ввести понятие окружности, вписанной в многоугольник.

Вопросы для обсуждения.

– Какая окружность называется вписанной в многоугольник?

*Ответ:* Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.

– Можно ли вписать окружность в произвольный треугольник? четырехугольник?

*Ответ:* В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, если суммы длин его противоположных сторон равны.

– Приведите примеры четырехугольников, в которые можно вписать окружность.

*Ответ:* Окружность можно вписать в ромб, квадрат и в любой другой выпуклый четырехугольник, в котором равны суммы противоположных сторон.

– Где расположен центр окружности, вписанной в треугольник? Чему равен ее радиус?

*Ответ:* Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения биссектрис, а его радиус равен длине перпендикуляра, опущенного из точки пересечения биссектрис к стороне треугольника.

– Можно ли вписать окружность в многоугольник?

(Ответы на этот вопрос могут быть самыми разнообразными, причем вряд ли кто-либо из учащихся даст полный и правильный ответ.)

***Вывод.*** Не во всякий многоугольник можно вписать окружность, а вот в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Это утверждение получило название теоремы об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

4. Доказательство теоремы об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

*Теорема:* В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

*Дано:* $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – правильный $n$-угольник.

*Доказать:*

а) в $A_1A_2A_3 \dots A_n$ можно вписать окружность;

б) данная окружность единственная.

(Доказательство проводится в форме обсуждения вопросов учителя.)

Вопросы для обсуждения (рис. 12.4).

– Мы знаем, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность. Может ли центр описанной окружности совпадать с центром вписанной в данный многоугольник окружности? Почему?

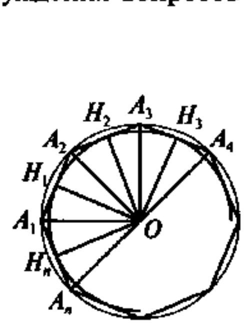


**Рис. 12.4**

*Ответ:* Центр описанной около правильного многоугольника окружности совпадает с центром вписанной в него окружности, так как $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n$ как радиусы описанной окружности. $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2 = \angle OA_3A_4 = ... = \angle OA_1A_n$, так как $A_1O$, $A_2O$, $A_3O$, ... , $A_nO$ – биссектрисы равных углов $A_1A_2A_n$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, ... соответственно, следовательно, $\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = \Delta OA_nA_1$, поэтому их высоты $OH_1$, $OH_2$, $OH_3$, ... , $OH_n$ равны, т. е. $O$ – центр окружности, вписанной в многоугольник $A_1A_2A_3 ... A_n$, *точки* $H_1$, $H_2$, ... , $H_n$ – точки касания.

– Существует ли еще какая-нибудь окружность, вписанная в этот же правильный многоугольник? Почему?

*Ответ:* Если бы такая окружность существовала, то ее центр был бы равноудален от сторон многоугольника, т. е. он лежал бы на каждой из биссектрис углов многоугольника. В таком случае центр первой окружности совпадает с центром второй окружности, а радиус этой окружности равен расстоянию от точки $O$ до сторон многоугольника, т. е. радиусу первой окружности.

5. Изучение следствий 1 и 2 и их доказательство.

Работа в группах.

(Ученики в группах выполняют задание. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

1) Докажите, что окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

2) Докажите, что центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

### V. Рефлексия учебной деятельности

1. В какой многоугольник всегда можно вписать окружность?
2. Сформулируйте теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.
3. Как найти центр окружности, вписанной в правильный многоугольник?
4. Около какого многоугольника всегда можно описать окружность?
5. Сформулируйте теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.
6. Как найти центр окружности, описанной около правильного многоугольника?

### Домашнее задание

1. П. 110, 111, вопросы 3, 4 (учебник, с. 284).
2. Решить задачи № 184 (б, г, д, е), 185, 186.

# Урок 41. Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

***Основные дидактические цели урока:*** вывести формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности; научить учащихся применять указанные формулы в процессе решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Два ученика записывают на доске доказательство теоремы о вписанной в правильный многоугольник и теоремы об описанной около правильного многоугольника окружности во время проведения фронтального опроса.)

2. Фронтальный опрос.

– Какая формула используется для вычисления суммы углов выпуклого *n*-угольника?
– Назовите формулу для вычисления угла правильного *n*-угольника.
– Сформулируйте следствия из теорем о вписанной в правильный многоугольник и описанной около правильного многоугольника окружностях.
– Что вы понимаете под словами «центр правильного многоугольника»?

(Заслушать доказательства теорем, подготовленных у доски.)

3. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проведения фронтального опроса.)

**I уровень сложности**

1. Найдите углы правильного восемнадцатиугольника.

2. Угол правильного *n*-угольника равен 108°. Вычислите количество его сторон.

3. Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна 45°?

**II уровень сложности**

1. Сумма углов правильного $n$-угольника равна 1440°. Чему равна сумма углов другого правильного многоугольника, если известно, что вершины первого многоугольника, взятые через одну, служат вершинами второго?

2. Докажите, что в правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали $AC$ и $AD$ делят угол $BAE$ на три равные части.

**III уровень сложности**

1. Вокруг правильного многоугольника описана окружность с радиусом, равным 10 см, и в этот же многоугольник вписана окружность с радиусом, равным 5 см. Чему равно число сторон этого многоугольника?

2. В правильном многоугольнике диагонали $MN$ и $KE$ пересекаются в точке $F$ так, что $MF = 6$ см, $NF = 8$ см, $KE = 16$ см. Найдите $KF$ и $EF$.

## III. Определение темы урока

Работа в группах.

Решить задачу с последующим обсуждением.

***Задача.*** В правильный шестиугольник вписана окружность с радиусом 8 см (рис. 12.5).

Найдите: а) сторону шестиугольника; б) площадь шестиугольника; в) радиус описанной около него окружности.

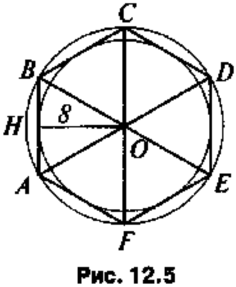


**Рис. 12.5**

Наводящие вопросы.

– Разбейте шестиугольник $ABCDEF$ на треугольники с общей вершиной $O$.
– Чем является радиус $OH$ вписанной в треугольник $AOB$ окружности?
– Чему равен угол $AOB$?
– Вычислите градусную меру угла $AOH$.
– Перечислите все известные элементы треугольника $AOH$. Как найти его неизвестные элементы?
– Что можно сказать о площадях треугольников $AOB$, $BOC$, $COD$, $DOE$, $EOF$, $FOA$?

## IV. Изучение нового материала

Работа в парах.

Решить задачу с последующим обсуждением.

***Задача.*** Докажите, что в правильном $n$-угольнике $S = \frac{1}{2}Pr$, $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, $r = R\cos\frac{180°}{n}$, где $a_n$ – сторона, $r$ – радиус вписанной окружности, $R$ – радиус описанной окружности, $P$ – периметр, $S$ – площадь многоугольника (рис. 12.6).

Наводящие вопросы.

– Чему равна площадь каждого треугольника, полученного при разбиении правильного $n$-угольника соединением центра данного $n$-угольника с его вершинами?

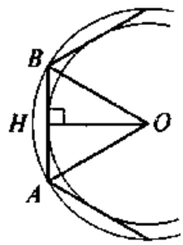



Рис. 12.6

*Ответ:* $S_\Delta = \frac{1}{2}a_n \cdot r$.

– Найдите площадь всего $n$-угольника.

*Ответ:* $S = n \cdot \frac{1}{2}a_n \cdot r$. (1)

– Чему равно значение произведения $n \cdot a_n$?

*Ответ:* $n \cdot a_n = P$.

– Как в этом случае можно записать формулу (1)?

*Ответ:* $S = \frac{1}{2}Pr$.

– Чему равен $\angle AOB$? $\angle AOH$?

*Ответ:* $\angle AOB = \frac{360°}{n}$, $\angle AOH = \frac{180°}{n}$.

– В $\Delta AOH$ $\angle AOH = \frac{180°}{n}$, $OA = R$. Найдите $HO$, $AH$.

*Ответ:* $AH = AO \cdot \sin\angle AOH = R\sin\frac{180°}{n}$; $OH = AO \cdot \cos\angle AOH = R\cos\frac{180°}{n}$.

– Чему равна сторона правильного $n$-угольника? радиус вписанной окружности?

*Ответ:* $AB = 2AH = 2R\sin\frac{180°}{n}$; $r = R\cos\frac{180°}{n}$.

### V. Закрепление изученного материала

1. Самостоятельное решение задач.

Решить задачу № 65 (рабочая тетрадь).

*Ответ:* $a_6 = 8$ см; $R = 8$ см; $P = 48$ см; $S = 96\sqrt{3}$ см$^2$.

2. Работа в парах.

Разобрать решение задачи № 1089.

Наводящие вопросы.

– Квадрат вписан в окружность. Что нужно знать для определения стороны квадрата?

*Ответ:* Для определения стороны квадрата нужно знать радиус описанной около него окружности.

– Как по известному периметру треугольника можно вычислить радиус описанной около него окружности?

*Ответ:* Найдем сторону треугольника, а затем используем формулу $R = 2a_3\sin\frac{180°}{3}$.

(Учащиеся записывают решение задачи в тетради.)

$a_3 = P : 3 = 18 : 3 = 6$ см.

$R = 2a_3\sin\frac{180°}{3} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ см.

$$a_4 = \frac{R}{2\sin\frac{180°}{4}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6} \text{ см.}$$

*Ответ:* $a_4 = 3\sqrt{6}$ см.

3. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

*I уровень сложности:* задачи № 1087 (1, 2), 1088 (1, 3) (учебник), № 66 (рабочая тетрадь).

*II уровень сложности:* задачи № 1090, 1091, № 66 (рабочая тетрадь).

(Учащиеся, успешно справившиеся с решением предложенных задач, решают дополнительные задачи.)

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** Центры двух окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды, которая в одной из окружностей является стороной вписанного правильного четырехугольника, а в другой – стороной вписанного правильного треугольника. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если длина указанной хорды равна 8 см.

*Решение:* Хорда $CD$ является одновременно стороной правильного четырехугольника и правильного треугольника, вписанных в окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ соответственно (рис. 12.7). $O_1K$ и $O_2K$ – радиусы окружностей, вписанных в данные четырехугольник и треугольник.

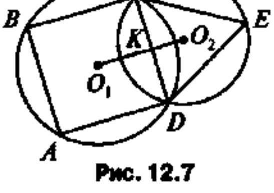


Рис. 12.7

$O_1K = r_1 = R_1\cos\frac{180°}{4}$, $O_2K = r_2 = R_2\cos\frac{180°}{3}$, где $R_1$ и $R_2$ – радиусы окружностей, описанных около данных четырехугольника и треугольника, следовательно, $R_1 = \dfrac{a_4}{2\sin\dfrac{180^\circ}{4}} = \dfrac{8}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2}$ см,

$R_2 = \dfrac{a_3}{2\sin\dfrac{180^\circ}{3}} = \dfrac{8}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ см, тогда $O_1K = 4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4$ см,

$O_2K = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ см.

$$O_1O_2 = O_1K + O_2K = 4 + 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{12+4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

*Ответ:* $\dfrac{12+4\sqrt{3}}{3}$ см.

***Задача 2.*** Сторона правильного двенадцатиугольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ равна 4 см. Найдите площадь шестиугольника $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$.

*Решение:* Правильные двенадцатиугольник $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ и шестиугольник $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ имеют одну и ту же описанную около них окружность, поэтому $R_{12} = R_6$.

$$R_{12} = \frac{a_{12}}{2\sin\dfrac{180^\circ}{12}} = \frac{a_6}{2\sin\dfrac{180^\circ}{6}} = R_6.$$

$\dfrac{a_{12}}{\sin 15^\circ} = \dfrac{a_6}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \dfrac{4}{\sin 15^\circ} = \dfrac{a_6}{\dfrac{1}{2}}$, следовательно,

$a_6 = \dfrac{4}{\sin 15^\circ}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{\sin 15^\circ}$ см.

Площадь правильного многоугольника вычисляется по формуле $S = \dfrac{1}{2}Pr$.

$$P = 6\cdot a_6 = 6\cdot\frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{12}{\sin 15^\circ}.$$

$r = R\cos\dfrac{180^\circ}{6} = R\cos 30^\circ$, $R = \dfrac{a_6}{2\sin\frac{180^\circ}{6}} = a_6 = \dfrac{12}{\sin 15^\circ}$, следовательно, $r = \dfrac{2}{\sin 15^\circ}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ}$ см.

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{\sin 15^\circ}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin^2 15^\circ} \approx 155{,}16 \text{ см}^2.$$

*Ответ:* $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sin^2 15^\circ} \approx 155{,}16$ см$^2$.

*Критерии оценивания:*
- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Чему равна площадь правильного многоугольника?
2. Чему равны сторона и радиус вписанной окружности правильного многоугольника?

### Домашнее задание

1. П. 112, вопросы 5–7 (учебник, с. 284).
2. Решить задачи № 1087 (3, 5), 1088 (2, 5), 1093 (учебник), № 67, 68 (рабочая тетрадь).

## Урок 42. Решение задач по теме «Правильный многоугольник»

***Основные дидактические цели урока:*** рассмотреть некоторые способы построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки; совершенствовать навыки решения задач на применение формул для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Три ученика выполняют задания на доске во время проведения математического диктанта.)

1) Вывести формулу для вычисления площади правильного многоугольника.
2) Вывести формулу для вычисления стороны правильного многоугольника.
3) Вывести формулу для вычисления радиуса окружности, вписанной в правильный многоугольник.

2. Выполнение заданий.

В правильном многоугольнике число сторон равно $n$, а радиус описанной около него окружности равен $R$. Вычислите сторону, площадь и радиус вписанной в него окружности, если известно, что: $n = 3$ (вариант 1); $n = 4$ (вариант 2); $n = 6$ (вариант 3).

(В ходе проверки выполнения заданий учитель заполняет таблицу, заранее заготовленную на доске. После того, как таблица будет готова, учащиеся переносят ее в свою тетрадь.)

**Правильные многоугольники**

| $n$ | $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$ | $r = R\cos\frac{180°}{n}$ | $S = \frac{1}{2}Pr$ |
|---|---|---|---|
| 3 | $R\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}R$ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ |
| 4 | $R\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ | $2R^2$ |
| 6 | $R$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$ |

(Заслушать учащихся, работавших у доски.)

3. Самостоятельное решение задач.

(Наиболее подготовленные учащиеся в это время решают задачи № 1, 2.)

*Задача 1.* В трапеции $ABCD$ меньшее основание $BC$ равно $a$, прилежащие к этому основанию углы равны 105°, диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции (рис. 12.8).

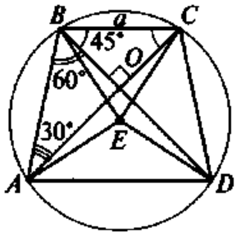


Рис. 12.8

*Решение:*

*Первый способ:* $\angle ABC = \angle BCD = 105° \Rightarrow \angle BAD = \angle ADC = 180° - 105° = 75°$.

Треугольник $BOC$ – равнобедренный прямоугольный, тогда $\angle OBC = \angle OCB = 45°$, $\angle ABO = 60°$, $\angle BAO = 30°$.

По теореме Пифагора $BO^2 + CO^2 = BC^2 = a^2$. $BO = CO$, тогда $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

В $\Delta ABO$ $\mathrm{tg}\angle ABO = \frac{AO}{BO}$, отсюда $AO = BO \cdot \mathrm{tg}\,60° = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$BD = BO + OD = BO + AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

В трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, поэтому $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC$.

Так как $BD=AC$, то $S=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2}\left(4+2\sqrt{3}\right)=$
$=\frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}.$

*Второй способ:* Опишем около данной трапеции окружность.

Так как $\angle BAD = 30°$ (см. 1-й способ), то $\cup BC = 60°$, следовательно, центральный угол $BEC = 60°$, где $E$ – центр описанной окружности, отсюда $\Delta BEC$ – равносторонний, $BE = EC = a$ и радиус описанной окружности равен $a$.

$\angle BOC = \frac{1}{2}(\cup BC + \cup AD)$, следовательно, $\cup AD = 2\cdot\angle BOC -$ $- \cup BC = 2\cdot 90° - 60° = 120°$, тогда $\angle AED = 120°$.

В $\Delta AED$ по теореме косинусов $AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2AE\cdot DE \times$ $\times \cos\angle AED = a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot -\frac{1}{2} = 3a^2$, следовательно, $AD =$ $= a\sqrt{3}$.

$S_{AED}=\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin\angle DAE=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{3}\cdot a\cdot\sin 30°=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

$S_{BEC}=\frac{1}{2}BE\cdot EC\cdot\sin\angle BEC=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60°=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Так как $\angle BEC = 60°$, $\angle AED = 120°$, то $\angle AEB = \angle CED = 90°$, тогда $S_{ABE} = S_{CDE} = \frac{1}{2}a^2$.

$S_{ABCD} = S_{AED} + S_{BEC} + S_{ABE} + S_{CDE} = 2\cdot 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{1}{2}a^2 =$ $=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+a^2=\frac{a^2\sqrt{3}+2a^2}{2}=\frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}.$

***Задача 2.*** В окружность радиуса $R$ вписана трапеция, вершины которой делят окружность в отношении 2 : 3 : 2 : 5. Найдите площадь трапеции.

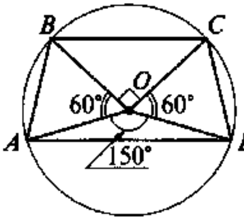


**Рис. 12.9**

*Решение:* Так как точки $A$, $B$, $C$, $D$ делят окружность в отношении 2 : 3 : 2 : 5, то $\cup AB = \cup AC = 60°$, $\cup BC = 90°$, $\cup AD = 150°$ (рис. 12.9).

Если $O$ – центр описанной окружности, то $\angle AOB = \angle COD =$ $= 60°$, $\angle BOC = 90°$, $\angle AOD = 150°$, тогда $S_{AOB} = S_{COD} = \frac{R\cdot R}{2}\times$ $\times\sin 60° = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}R^2, S_{AOD}=\frac{1}{4}R^2, \text{поэтому } S_{ABCD}=2\cdot 2\cdot\frac{R^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{4}R^2=$$

$$=R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{R^2}{4}\left(3+2\sqrt{3}\right).$$

**III. Определение темы и цели урока**

Повторить принцип построения правильных четырехугольника и треугольника.

***Задание.*** Построить правильный треугольник и правильный четырехугольник, используя циркуль и линейку.

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

**IV. Изучение нового материала**

1. Работа в парах.

Решить задачу с последующим обсуждением.

***Задача.*** Построить правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

Наводяшие вопросы.

– Какая зависимость существует между стороной правильного шестиугольника и радиусом описанной около него окружности?

*Ответ:* $a_6 = R$.

– Пусть $PQ$ – заданный отрезок, равный стороне правильного шестиугольника, который нам необходимо построить. Чему равен радиус описанной около этого шестиугольника окружности?

*Ответ:* $PQ$.

– Составьте план построения правильного шестиугольника со стороной $PQ$.

1) Построить окружность с радиусом, равным $PQ$.

2) Отметить на окружности произвольную точку $A_1$.

3) Отметить на окружности точки $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, чтобы выполнялось равенство $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$.

4) Последовательно соединить отрезами полученные точки.

5) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – искомый шестиугольник.

(Учитель или наиболее подготовленный ученик по ходу составления плана построения правильного шестиугольника выполняет на доске рисунок.)

2. Работа в группах.

(Учитель делит класс на две группы. Каждая группа получает одну из задач на построение правильных $2n$-угольников.

По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

***Задача 1.*** Как, используя правильный шестиугольник, построить правильный двенадцатиугольник?

Возможные варианты ответов (рис. 12.10).

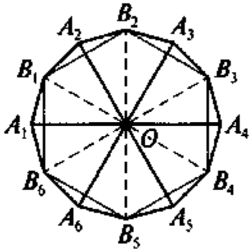


**Рис. 12.10**

1) Провести высоты треугольников $A_1A_2O$, $A_2A_3O$, $A_3A_4O$, $A_4A_5O$, $A_5A_6O$, $A_6A_1O$ до пересечения с окружностью. Если точки пересечения обозначить $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_6$, то $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6$ – искомый двенадцатиугольник.

2) Разделить дуги $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_4A_5$, $A_5A_6$, $A_6A_1$ пополам точками $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_6$. $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6$ – искомый двенадцатиугольник.

***Задача 2.*** Составить план построения правильного $2n$-угольника из имеющегося $n$-угольника.

1) Провести биссектрисы углов правильного $n$-угольника. Точка пересечения биссектрис $O$ будет являться центром описанной около $n$-угольника окружности. Построить эту окружность.

2) Из точки $O$ опустить перпендикуляры к сторонам правильного $n$-угольника до пересечения с окружностью.

3) Соединить последовательно вершины правильного $n$-угольника с полученными точками пересечения.

4) Полученный многоугольник – искомый правильный $2n$-угольник.

## V. Закрепление изученного материала

1. Самостоятельное решение задач.

1) Решить задачу № 1100 (г).

(Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

2) Решить задачи.

*I уровень сложности:* задачи № 69, 70 (б, в) (рабочая тетрадь).

*II уровень сложности:* задачи № 1092, 1094 (а, г).

## VI. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Найдите углы правильного пятнадцатиугольника.

2. Сторона правильного треугольника, вписанного в некоторую окружность, равна $4\sqrt{3}$. Найдите сторону правильного четырехугольника, описанного около этой же окружности.

*Вариант 2*

1. Найдите углы правильного восемнадцатиугольника.

2. Сторона правильного четырехугольника, вписанного в некоторую окружность, равна 2. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой же окружности.

**II уровень сложности**

*Вариант 1*

1. Сумма углов правильного $n$-угольника равна 1800°. Найдите его внешние углы.

2. Сторона правильного четырехугольника, описанного около некоторой окружности, равна 8. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в эту же окружность.

*Вариант 2*

1. Сумма углов правильного $n$-угольника равна 2340°. Найдите его внешние углы.

2. Сторона правильного треугольника, описанного около некоторой окружности, равна $2\sqrt{6}$. Найдите площадь правильного четырехугольника, вписанного в эту же окружность.

**III уровень сложности**

*Вариант 1*

1. Существует ли правильный многоугольник, у которого каждый угол равен 145°?

2. Сторона описанного правильного четырехугольника на $\sqrt{3}$ больше стороны правильного треугольника, вписанного в ту же окружность. Найдите сторону треугольника.

*Вариант 2*

1. Существует ли правильный многоугольник, у которого каждый угол равен 125°?

2. Сторона описанного правильного четырехугольника на $\sqrt{6}$ больше стороны правильного четырехугольника, вписанного в ту же окружность. Найдите сторону четырехугольника.

*Ответы к задачам самостоятельной работы:*

**I уровень сложности**

| *Вариант 1* | *Вариант 2* |
|---|---|
| 1. 156°. | 1. 160°. |
| 2. 8. | 2. $2\sqrt{6}$. |

**II уровень сложности**

| *Вариант 1* | *Вариант 2* |
|---|---|
| 1. 30°. | 1. 24°. |
| 2. $12\sqrt{3}$. | 2. 4. |

**III уровень сложности**

*Вариант 1*

1. Нет.
2. $3\sqrt{3}+6$.

*Вариант 2*

1. Нет.
2. $\dfrac{11\sqrt{6}+6}{5}$.

**VII. Рефлексия учебной деятельности**

Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе.

**Домашнее задание**

1. П.113, вопросы 6, 7 (учебник, с. 284).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1094 (а, г), 1095 (учебник), № 71 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1095, 1097, 1098, 1099.

# Урок 43. Длина окружности

***Основные дидактические цели урока:*** вывести формулу длины окружности; научить учащихся решать задачи на применение формулы длины окружности.

## Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 1095, 1097. Два ученика, успешно справившиеся с самостоятельной работой предыдущего урока, заранее оформляют рисунок и записывают краткое решение на доске.)

*Задача № 1095*

*Решение:* $FF_1E_1E$ – квадрат, поэтому $F_1F = EF = 1{,}5$ см, т. е. $a_6 = 1{,}5$ см (рис. 12.11). Найдем радиус вписанной в правильный шестиугольник $ABCDEF$ окружности.

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{6} = R\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

$$R = \frac{a_6}{2\sin\frac{180^\circ}{6}} = \frac{1{,}5}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1{,}5 \text{ см, тогда } r = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1{,}5 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ см.}$$

$$S = \frac{1}{2}Pr = \frac{1}{2}(a_6\cdot 6)\cdot r = \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 6\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{8} \text{ см}^2.$$

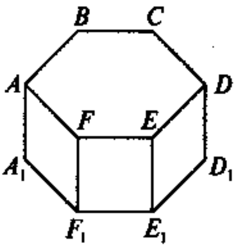



Рис. 12.11

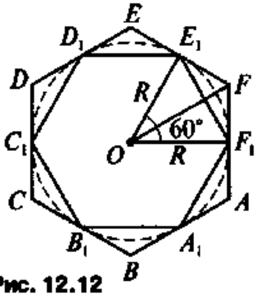



Рис. 12.12

***Задача № 1097***

***Решение:*** $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — вписанный в окружность шестиугольник (рис. 12.12), значит, $R = OE_1 = OF_1 = E_1F_1$.

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = 6 \cdot S_{OE_1F_1} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$$

В $\Delta OFF_1$ $FF_1$ — катет, лежащий против угла в 30°, т. е. $FF_1 = \frac{1}{2}OF$. По теореме Пифагора $OF_1{}^2 + FF_1{}^2 = OF^2$. Так как $OF_1 = R$, то $R^2 + FF_1{}^2 = 4FF_1{}^2$, то $3FF_1{}^2 = R^2$, отсюда $FF_1 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, $OF = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{OAF} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot OF \cdot OA \cdot \sin 60° = 3 \cdot \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= 3 \cdot \frac{4R^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}R^2.$$

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}{2R^2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}.$$

*Ответ:* 3 : 4.

2. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе.

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

3. Математический диктант с последуюшей самопроверкой.

(Проводится с целью повторения и подготовки учащихся к восприятию нового материала.)


Рис. 12.13

***Вариант 1***

1) Сторона правильного *n*-угольника, вписанного в окружность с радиусом *R*, вычисляется по формуле... .

2) Угол *AOB* — ... (рис. 12.13).

3) Если $\angle AOB = 30°$, то $AB$ – сторона правильного ..., вписанного в данную окружность.

4) Градусная мера дуги $AB$ равна 27°, а градусная мера угла $AOB$ равна... .

5) Сторона правильного треугольника равна 4 см. Радиус описанной около него окружности равен... .

6) Сторона правильного четырехугольника равна 8 см. Радиус вписанной в него окружности равен... .

7) Площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности с радиусом 6 см, равна... .

***Вариант 2***

1) Радиус описанной около правильного $n$-угольника окружности вычисляется по формуле... .

2) Угол $ABC$ – ... (рис. 12.14).

3) Если $\angle ABC = 18°$, то $AC$ – сторона правильного ..., вписанного в данную окружность.

4) Градусная мера дуги $AC$ равна ..., если $\angle AOC = 25°$.

5) Сторона правильного четырехугольника равна 6 см. Радиус описанной около него окружности равен... .

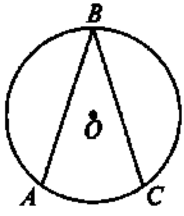


Рис. 12.14

6) Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см. Радиус вписанной в него окружности равен... .

7) Площадь правильного треугольника, описанного около окружности с радиусом 2 см, равна... .

*Ответы к заданиям математического диктанта:*

***Вариант 1***

1) $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$. 2) Центральный. 3) Двенадцатиугольника. 4) 25°. 5) $3\sqrt{2}$ см. 6) 2 см. 7) $72\sqrt{3}$ см$^2$.

***Вариант 2***

1) $R = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$. 2) Вписанный. 3) Десятиугольника. 4) 27°. 5) $2\sqrt{2}$ см. 6) 4 см. 7) $12\sqrt{3}$ см$^2$.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 6–7 баллов;
- оценка «4» – 5 баллов;
- оценка «3» – 3–4 балла;
- оценка «2» – не ставится.

**III. Определение темы урока**

– Каким образом можно измерить длину проволоки, из которой изготовлен обруч?

Возможные варианты ответов.

1. Выпрямить проволоку, из которой изготовлен обруч, и измерить линейкой ее длину.

2. Обтянуть обруч нитью и измерить ее длину.

– На доске вычерчена окружность. Как измерить длину этой окружности хотя бы примерно, но как можно точнее?

Возможные варианты ответов.

а) С помощью нити.

б) Вписать многоугольник с большим числом сторон в данную окружность и найти его периметр.

(Учитель предупреждает учащихся, что формулу для вычисления длины окружности (курс математики за 5–6 классы) использовать нельзя.)

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

**IV. Изучение нового материала**

Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности. Это приближенное значение длины окружности при увеличении числа сторон многоугольника практически равно периметру многоугольника. Точное значение длины окружности – это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

1. Вывод формулы для вычисления длины окружности.

Пусть имеются две окружности с радиусами $R_1$ и $R_2$, а их длины равны $C_1$ и $C_2$ соответственно. Впишем в каждую из них $n$-угольники и найдем отношение их периметров $P_1$ и $P_2$. $P_1 = n \cdot a_1$, $P_2 = n \cdot a_2$, где $a_1$ и $a_2$ – стороны $n$-угольников. Используя формулу $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, получаем $a_1 = 2R_1\sin\frac{180°}{n}$, $a_2 = 2R_2\sin\frac{180°}{n}$, поэтому $P_1 = n \cdot a_1 = 2nR_1\sin\frac{180°}{n}$, $P_2 = n \cdot a_2 = 2nR_2\sin\frac{180°}{n}$, отсюда $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2nR_1\sin\frac{180°}{n}}{2nR_2\sin\frac{180°}{n}} = \frac{2R_1}{2R_2} = \frac{D_1}{D_2}$, где $D_1$ и $D_2$ – диаметры окружностей.

По свойству пропорций, так как $\frac{P_1}{P_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то справедливо равенство $\frac{P_1}{D_1} = \frac{P_2}{D_2}$.

Ранее было установлено, что при $n \to \infty$, $P_1 \to C_1$, $P_2 \to C_2$, поэтому $\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2}$, т. е. отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное. Это число обозначают греческой буквой $\pi$ (пи).

Итак, $\frac{C}{D} = \pi$ или $C = \pi D = 2\pi R$.

*Формула для вычисления длины окружности:*
$C = 2\pi R$.

Число $\pi$ является приближенным ($\pi \approx \frac{22}{7}$), его значение было найдено еще в III в. до н. э. греческим ученым Архимедом. При решении задач чаще используют приближенное значение $\pi$, равное 3,14.

3. Вывод формулы для вычисления длины $l$ дуги окружности с градусной мерой $\alpha$.

(Доказательство проводится в форме обсуждения вопросов учителя.)

– Какую часть окружности составляет дуга в 1°?

*Ответ:* $\frac{1}{360}$ часть.

– Чему равна длина дуги окружности в 1°?

*Ответ:* $l = \frac{C}{360} = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$.

– Чему равна длина дуги окружности с градусной мерой $\alpha$?

$l = \frac{\pi R}{180}\alpha$.

*Формула для вычисления длины $l$ дуги окружности с градусной мерой $\alpha$:*

$l = \frac{\pi R}{180}\alpha$.

**V. Закрепление изученного материала**

1. Работа в парах.

Решить задачи № 72, 74 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

2. Фронтальная работа с классом.

Разобрать решение задачи № 1104 (г).

(Учащиеся самостоятельно записывают решение задачи в тетради.)

***№ 1104 (г)***

– Что нужно знать для вычисления длины окружности?

*Ответ:* Ее радиус.

– Покажите радиус окружности на рис. 12.15. Почему диагонали прямоугольника пересекаются в центре окружности, в которую вписан прямоугольник?

*Ответ:* $OC$, $OD$, $OA$, $OB$. Углы прямоугольника прямые, поэтому они, с одной стороны, опираются на диагонали $AC$ и $BD$, а с другой стороны, на диаметры. Так как диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, то центр окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей.

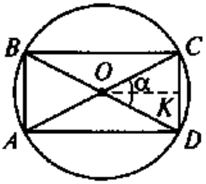


Рис. 12.15

– В $\Delta OCD$ $CD = a$, $OC = OD$, $\angle COD = \alpha$. Как найти $OC$ и $OD$?

*Ответ:*

а) по теореме косинусов $CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD\cos\alpha$, следовательно, если $CD = a$, $OC = OD = R$, то $a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha \Rightarrow$

$$R^2 = \frac{a^2}{2 - 2\cos\alpha} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2 - 2\cos\alpha}}.$$

б) $\Delta OCD$ – равнобедренный. Проведем биссектрису $OK$, которая также является высотой и медианой. В прямоугольном

$$\Delta OCK\ \angle COK = \frac{\alpha}{2},\ CK = \frac{a}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{CK}{OC} \Rightarrow OC = \frac{CK}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = R.$$

– Какая формула используется для вычисления длины окружности?

*Ответ:* $C = 2\pi R$.

а) Если $R = \dfrac{a}{\sqrt{2 - 2\cos\alpha}}$, то $C = \dfrac{2\pi a}{\sqrt{2 - 2\cos\alpha}} = \dfrac{\sqrt{2}\pi a}{\sqrt{1 - \cos\alpha}}$.

б) Если $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, то $C = \dfrac{2\pi a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\pi a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

3. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

Решить задачи № 1104 (а), 1105 (б, г).

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение математического диктанта и за самостоятельное решение задач.)

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. По какой формуле можно вычислить длину окружности?
2. Чему равно значение числа $\pi$?
3. Как вычислить длину дуги окружности?

### Домашнее задание

1. П.114, вопросы 8–10 (учебник, с. 284).
2. Решить задачи № 1104 (б, в, д), 1105 (а, в).

## Урок 44. Решение задач по теме «Длина окружности»

***Основная дидактическая цель урока:*** совершенствовать навыки решения задач на применение формул длины дуги окружности и длины окружности.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Фронтальная работа с классом.

1) Теоретический опрос.

– Какая формула используется для вычисления длины окружности?

– Что означает число $\pi$ и чему равно его приближенное значение?

– По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?

2) Решить задачи № 1103, 1104 (а).

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 1104 (д), 1105 (в). Два ученика заранее оформляют рисунок и записывают краткое решение на доске.)

***Задача № 1104 (д)***

*Решение:* $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{AOB} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 60° = 3 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ (рис. 12.16).

$R = 4$ см.

$C = 2\pi R = 8\pi$ см.

*Ответ:* $C = 8\pi$ см.

Вопросы для обсуждения.

– Почему $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{AOB}$?

– Какая формула используется в решении задачи для вычисления площади треугольника?

– Как еще можно вычислить площадь треугольника $ABO$?

***Задача № 1105 (в)***

*Решение:* Стороны $\Delta ABC$ являются касательными к окружности, поэтому если радиус окружности равен $r$, то $CM = r$, $CN = r$ (рис. 12.17).

В прямоугольном $\Delta ABC$ $\angle A = \alpha$, $AB = c$, тогда $CB = c \cdot \sin\alpha$, $AC = c \cdot \cos\alpha$, поэтому $AM = c \cdot \cos\alpha - r$, $BN = c \cdot \sin\alpha - r$.

Тогда $AK = c \cdot \cos\alpha - r$, $BK = c \cdot \sin\alpha - r$.

$AK + KB = c \cdot \cos\alpha - r + c \cdot \sin\alpha - r$, отсюда $c \cdot \cos\alpha + c \cdot \sin\alpha - 2r = c$.

Таким образом, $c(\cos\alpha + \sin\alpha - 1) = 2r$.

$$r = \frac{c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{2}.$$

$$C = 2\pi r = \frac{2\pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{2} = \pi c(\cos\alpha + \sin\alpha - 1).$$

*Ответ:* $C = \pi c(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$.

Вопросы для обсуждения.

– Почему $CM = r$, $CN = r$?

– Почему $CB = c \cdot \sin\alpha$, $AC = c \cdot \cos\alpha$?

– Почему верно равенство $c \cdot \cos\alpha + c \cdot \sin\alpha - 2r = c$?

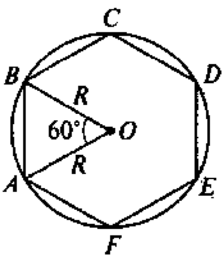



Рис. 12.16

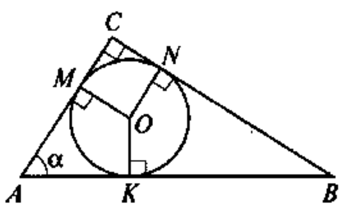



Рис. 12.17

– Почему стороны треугольника *ABC* являются касательными к данной окружности?

### III. Решение задач по готовым чертежам

(Самостоятельное решение задач с последующей самопроверкой и обсуждением задач, с которыми не справилось большинство учащихся.)

1. *Дано:* $AB = 10$ (рис. 12.18).

*Найти:* $C$, длины дуг $CB$ и $AC$.

2. *Дано:* $\Delta ABC$ – правильный (рис. 12.19).

*Найти:* Длину окружности, длину дуги $BC$.

3. *Дано:* $ABCD$ – правильный четырехугольник, длина дуги $AD$ равна $4\pi$ (рис. 12.20).

*Найти:* $S_{ABCD}$.

4. *Дано:* $ABCD$ – правильный четырехугольник, $P_{ABCD} = 16$ (рис. 12.21).

*Найти:* Длину окружности.

5. *Дано:* $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, $S_{ABCDEF} = 36\sqrt{3}$ (рис. 12.22).

*Найти:* Длину дуги $AFE$.

6. *Дано:* $AB = BC = 10$, $AC = 8$ (рис. 12.23).

*Найти:* Длину окружности.

*Ответы к задачам по готовым чертежам:*

1. $10\pi$; $\frac{5\pi}{4}$. 2. $4\pi$; $\frac{4\pi}{3}$. 3. 128. 4. $4\pi$. 5. $\frac{4\sqrt{6}\pi}{3}$. 6. $\frac{50\pi}{3}$.

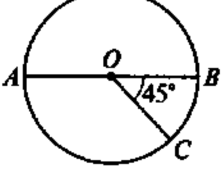


Рис. 12.18

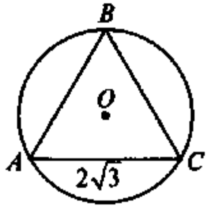


Рис. 12.19

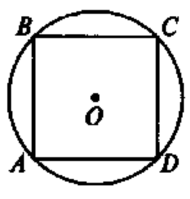


Рис. 12.20

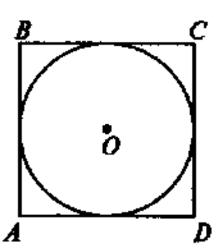


Рис. 12.21

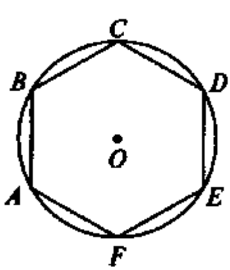


Рис. 12.22

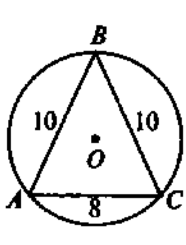


Рис. 12.23

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

**IV. Решение задач**

1. Работа в парах.

Решить задачи № 76 (рабочая тетрадь), № 1110 с последующим обсуждением.

***Задача № 1110***

*Решение:* $AB$ = 450 мм, $\cup BC$ = 47,1 мм (рис. 12.24).

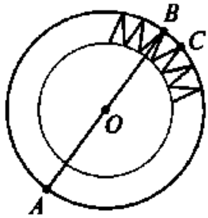


**Рис. 12.24**

$C = 2\pi R = 3{,}14 \cdot 450 = 1413$ мм.

1413 : 47,1 = 30 зубьев.

*Ответ:* 30 зубьев.

2. Самостоятельное решение задач.

*I уровень сложности:* задача № 75 (рабочая тетрадь).

*II уровень сложности:* задачи № 1108, 1112.

**V. Самостоятельная работа по готовым ответам**

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Найдите длину окружности с радиусом 5 см. Чему равна длина ее дуги с градусной мерой 36°?

2. Длина окружности, описанной около квадрата, равна $12\pi$ см. Найдите длину окружности, вписанной в этот квадрат.

***Вариант 2***

1. Найдите длину окружности с радиусом 9 см. Чему равна длина ее дуги с градусной мерой 20°?

2. Длина окружности, вписанной в правильный треугольник, равна $2\sqrt{3}\pi$ см. Найдите длину окружности, описанной около этого треугольника.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. В окружности длиной $75\pi$ проведена хорда, стягивающая дугу в 120°. Вычислите длину данных дуги и хорды.

2. Окружность с радиусом 12 см разогнута в дугу, центральный угол которой равен 135°. Найдите радиус этой дуги и длину хорды, стягиваемой этой дугой.

*Вариант 2*

1. В окружности длиной $54\pi$ проведена хорда, стягивающая дугу в 150°. Вычислите длину дуги и хорды, стягивающей ее.

2. Дуга, радиус окружности которой равен 6 см и центральный угол 120°, свернута в окружность. Найдите радиус окружности. Чему равна хорда, стягиваемая этой дугой?

**III уровень сложности**

*Вариант 1*

1. Вычислите радиус окружности, длина которой равна сумме длины окружности с радиусом 6 см и длины дуги окружности с радиусом 9 см и центральным углом 100°.

2. Вычислите длину дуги $APD$, если длина дуги $AMB$ равна $12\pi$, а радиусы дуг $AMB$, $BNC$ и $CKD$ относятся как 3 : 2 : 1 (рис. 12.25). ($AB$, $BC$, $CD$, $AD$ – диаметры полуокружностей.)

*Вариант 2*

1. Вычислите радиус дуги с центральным углом 160°, если ее длина равна разности длин окружностей с радиусами 27 см и 15 см.

2. Длина дуги $ABC$ равна $24\pi$ (рис. 12.26). Вычислите длину дуги $ADE$, если радиусы дуг $ADE$, $EKM$, $MNC$ относятся как 5 : 4 : 3. ($AC$, $AE$, $EM$, $MC$ – диаметры полуокружностей.)

*Ответы к задачам самостоятельной работы:*

**I уровень сложности**

*Вариант 1*

1. $10\pi$; $\pi$.
2. $6\sqrt{2}\pi$.

*Вариант 2*

1. $18\pi$; $\pi$.
2. $4\sqrt{3}\pi$.

**II уровень сложности**

*Вариант 1*

1. $24\pi$; $36\sqrt{3}$.
2. $R = 32$; $32\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

*Вариант 2*

1. $22{,}5\pi$; $27\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
2. $R = 2$; $6\sqrt{3}$.

**III уровень сложности**

*Вариант 1*

1. 8,5.
2. $24\pi$.

*Вариант 2*

1. 27.
2. $10\pi$.

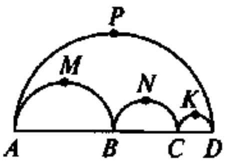


Рис. 12.25

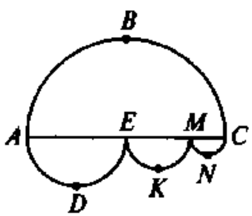


Рис. 12.26

### VI. Рефлексия учебной деятельности

Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе по готовым ответам.

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 1106, 1107, 1109 (учебник), № 77 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1106, 1107, 1111, 1113.

## Урок 45. Площадь круга и кругового сектора

***Основные дидактические цели урока:*** вывести формулу площади круга и на ее основе получить формулу площади кругового сектора; научить учащихся решать задачи на применение формул площади круга и кругового сектора.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 1106, 1111. Два ученика записывают краткое решение на доске. Остальные учащиеся работают по индивидуальным карточкам или решают задачи по готовым чертежам.)

2. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три-шесть учеников получают карточки разного уровня сложности.)

**I уровень сложности**

1) Найдите длины дуг, на которые разбивают окружность два радиуса. Угол между радиусами равен 120°, радиус окружности равен 6 дм.

2) Найдите длину окружности, в которую вписан квадрат со стороной 5 см.

**II уровень сложности**

1) В окружность вписан правильный треугольник с площадью $12\sqrt{3}$ см$^2$. Найдите длину окружности.

2) Около некоторой окружности описан правильный шестиугольник со стороной $4\sqrt{3}$ дм. Вычислите длину дуги данной окружности с градусной мерой 150°.

**III уровень сложности**

1) В окружности длиной $40\pi$ проведена хорда, отстояшая от центра на 10 единиц. Найдите длину меньшей из дуг, стягиваемых этой хордой.

2) Даны две окружности. Вторая окружность имеет центр на первой окружности и касается ее диаметра $AB$ в точке $C$. Найдите длины окружностей, если известно, что $AC = a$, $BC = b$.

3. Решение задач по готовым чертежам с последующей проверкой по готовым ответам.

1) *Дано:* $ABCD$ – квадрат, $S_{ABCD} = 16$ (рис. 12.27).

*Найти:* Длину окружности.

2) *Дано:* $\Delta ABC$ – правильный, длина дуги $AB = 4\pi$ (рис. 12.28).

*Найти:* $S\Delta_{ABC}$.

3) *Дано:* $AB = 2$ (рис. 12.29).

*Найти:* Длины дуг $AB$, $BC$, $AKC$.

4) *Дано:* $AB$ – диаметр (рис. 12.30).

*Найти:* Длину полуокружности $ACB$.

5) *Дано:* $l\smile_{EB} = l\smile_{BC} = l\smile_{CF} = 4\pi$, $EF$ – диаметр окружности с центром $O$ (рис. 12.31).

*Найти:* $BC$.

6) *Дано:* $AC = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (рис. 12.32).

*Найти:* Длину дуги $AC$.

***Ответы к задачам по готовым чертежам:***

1) $4\sqrt{2}R$. 2) $27\sqrt{3}$. 3) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $2\pi$. 4) $6{,}5\pi$. 5) $72\sqrt{3}$. 6) $\frac{10\pi}{3}$.

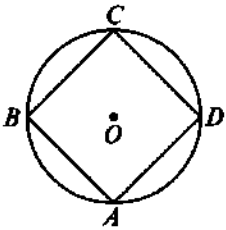


Рис. 12.27

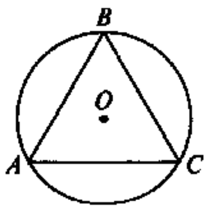


Рис. 12.28

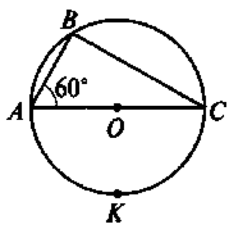


Рис. 12.29

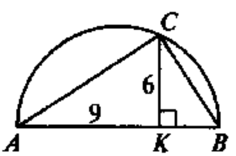


Рис. 12.30

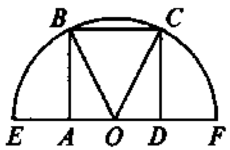


Рис. 12.31

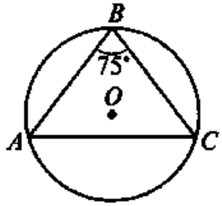


Рис. 12.32

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся. Заслушать учащихся, работавших у доски.)

***Задача № 1106***

$C = 2\pi r$; $500 \cdot 2\pi r = 989$, следовательно, $D = 2R = \dfrac{989}{500\pi} \approx 0,63$ м.

*Ответ:* 0,63 м.

Вопросы для обсуждения.

– Что означает один оборот колеса с математической точки зрения?

– Чему равно расстояние, пройденное автомобилем, если колесо автомобиля сделало один оборот?

***Задача № 1111***

$D = 58$ см, следовательно, $R = \dfrac{D}{2} = 29$ см.

$$l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 29 \cdot 117°}{180°} = \frac{\pi \cdot 29 \cdot 13}{20} = \frac{377\pi}{20} \approx 59,2 \text{ см.}$$

*Ответ:* $\approx 59,2$ см.

Вопросы для обсуждения.

– Что нужно знать для вычисления длины дуги?

– Каким образом можно вычислить радиус камня?

## III. Определение темы урока

1. Повторить понятие круга (курс математики за 6 класс).

***Определение:*** Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Если круг с центром $O$ имеет радиус, равный $R$, то он содержит точку $O$ и все точки плоскости, находящиеся на расстоянии, не превосходящем $R$.

2. Решить задачу.

Сколько чернозема потребуется для заполнения клумбы в форме круга радиусом 3 м и высотой 30 см?

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## IV. Изучение нового материала

1. Вывести формулу площади круга.

(В ходе изложения нового материала учитель записывает краткий план лекции на доске, ученики – в тетрадях.)

План лекции.

а) $A_1A_2A_3...A_n$ – правильный $n$-угольник с площадью $S_n$.

б) $\omega(O, R)$ – окружность с площадью $S$, описанная около $A_1A_2A_3...A_n$.

в) $\omega(O, r)$ – окружность с площадью $S_2$, вписанная в $A_1A_2A_3...A_n$.

г) Сравнение $S$, $S_2$, $S_n$, $S_2 < S_n < S$.

д) Так как $n \to \infty$, то $r = R\cos\frac{180°}{n} \to R\cos 0° = R$, значит, $S_2 \to S$, отсюда $S_n \to S$.

е) $S_n = \frac{1}{2}P_n r$.

ж) Так как $r \to R$, то $P_n \to 2\pi R$, значит, $S_n = \frac{1}{2}P_n r \to \frac{1}{2} \times 2\pi R \cdot R = \pi R^2 = S$.

***Формула для вычисления площади круга радиуса R:***

$S = \pi R^2$.

2. Ввести понятие кругового сектора.

***Определение:*** Круговым сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

Рис. 12.33, а.

$\cup ACB$ – дуга кругового сектора 1.

$\cup ADB$ – дуга кругового сектора 2.

3. Вывести формулу для вычисления площади кругового сектора.

Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы. Дать на обдумывание 2–3 мин. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

***Задача.*** Круговой сектор радиуса $R$ ограничен дугой с градусной мерой $\alpha$. Найдите его площадь.

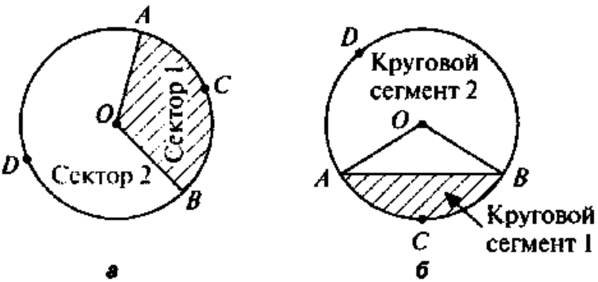



**Рис. 12.33**

*Решение:*

Площадь круга равна $S = \pi R^2$.

Площадь кругового сектора, ограниченного дугой в 1°, равна $S^1 = \frac{S}{360} = \frac{\pi R^2}{360}$.

Площадь кругового сектора, ограниченного дугой в α°, равна $S^1 \cdot \alpha = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$.

***Формула для вычисления площади кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α:***

$$S_{\text{кр. сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

4. Ввести понятие кругового сегмента.

***Определение:*** Круговым сегментом называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы этой дуги.

Рис. 12.33, б.

$\cup ACB$ – дуга кругового сегмента 1.

$\cup ADB$ – дуга кругового сегмента 2.

$AB$ – хорда сегмента.

5. Вывести формулу для вычисления площади кругового сегмента.

Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы. Дать на обдумывание 2–3 мин. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении решения участвует весь класс.)

– Как найти площадь кругового сегмента?

*Ответ:* Если градусная мера дуги меньше 180°, то площадь кругового сегмента равна разности площадей кругового сектора и треугольника, образованного двумя радиусами и хордой сегмента.

Если градусная мера дуги больше 180°, то площадь кругового сегмента равна сумме площадей кругового сектора и треугольника, образованного двумя радиусами и хордой сегмента.

### V. Закрепление изученного материала

1. Работа в парах.

Решить задачу № 78 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

2. Фронтальная работа с классом.

Разобрать решение задачи № 1117 (г).

(Учащиеся самостоятельно записывают решение задачи в тетради.)

***Задача № 1117 (г)***

*Дано:* $ABCD$ – трапеция, $AB = CD$, $\angle A = \alpha$, $AD = a$, $\omega(O, r)$ – окружность, вписанная в трапецию.

*Найти*: Площадь круга.

Вопросы для обсуждения.

– Что можно сказать о сторонах трапеции по отношению к вписанной в нее окружности?

*Ответ:* Они являются касательными к окружности.

– Чему равна градусная мера угла $OAP$?

*Ответ:* $\frac{\alpha}{2}$.

– В каком отношении делит точка $P$ основание $AD$?

*Ответ:* Пополам.

– Докажите, что $AP = DP$.

– Рассмотрите $\Delta AOP$. Что вы можете о нем сказать?

*Ответ:* $\Delta AOP$ прямоугольный, в нем $\angle OAP = \frac{\alpha}{2}$, $AP = \frac{a}{2}$, $OP$ – радиус вписанной в трапецию окружности.

– Какая тригонометрическая функция выражает зависимость двух катетов прямоугольного треугольника и одного из острых углов?

*Ответ:* Тангенс; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}}$.

– Найдите радиус $r$ и площадь $S$ вписанного круга.

*Ответ:* $r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $S = \frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

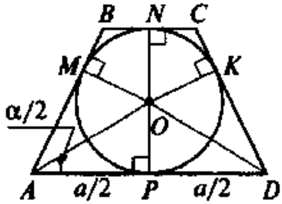


**Рис. 12.34**

*Решение:* Так как $AB$ и $AD$ – касательные, проведенные из точки $A$ (рис. 12.34), то $AO$ – биссектриса $\angle BAD$, т. е. $\angle OAP = \frac{\alpha}{2}$. $DO$ также является биссектрисой угла $CDA$, т. е. $\angle ODP = \frac{\alpha}{2}$.

Прямоугольные треугольники $AOP$ и $DOP$ ($OP \perp AD$) равны по катету и острому углу, поэтому $AP = DP = \frac{a}{2}$, тогда $\frac{OP}{AP} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, следовательно, $OP = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Но $OP$ – радиус вписанной окружности, значит, $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

*Ответ:* $\frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

3. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

*I уровень сложности:* задача № 81 (рабочая тетрадь), задачи № 1116 (в), 1117 (а) (учебник).

*II уровень сложности:* задача № 81 (рабочая тетрадь), задачи № 1116 (в) (учебник), дополнительная задача.

***Дополнительная задача***

Постройте круг, площадь которого в 4 раза больше площади данного круга. Во сколько раз длина окружности, ограничивающей первый круг, меньше длины окружности, ограничивающей второй круг?

*Решение:* Пусть радиус первого круга – $R_1$, тогда его площадь $S_1 = \pi R_1^2$. Если радиус второго круга – $R_2$, то площадь $S_2 = \pi R_2^2$.

Площадь второго круга в 4 раза больше площади первого круга, т. е. $S_2 = 4S_1$, тогда $\pi R_2^2 = 4\pi R_1^2$, откуда $R_2 = 2R_1$, т. е. радиус второго круга в 2 раза больше радиуса первого круга. Осталось построить круг с радиусом в 2 раза большим, чем радиус данного круга.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за решение задач по готовым чертежам (или по карточке) и за самостоятельное решение задач.)

## VI. Рефлексия учебной деятельности

1. По какой формуле можно вычислить площадь круга?
2. Как вычислить площадь кругового сектора и кругового сегмента?

## Домашнее задание

1. П. 115, 116, вопросы 11–13 (учебник, с. 284).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1114, 1116 (а, б), 1117 (б, в) (учебник); II уровень сложности: № 1116 (а, б), 1117 (б, в), дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

Постройте круг, площадь которого равна разности площадей двух данных кругов.

*Решение:* Пусть имеются два круга, площади которых $S_1$ и $S_2$, радиусы – $R_1$ и $R_2$ соответственно, тогда $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$. Нужно построить круг некоторого радиуса $R$ с площадью $S = S_1 - S_2$ ($S_1 > S_2 \Rightarrow R_1 > R_2$).

Так как $S = \pi R^2$, то $\pi R^2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 \Rightarrow R^2 = R_1^2 - R_2^2 \Rightarrow R_1^2 = R^2 + R_2^2$.

Построим прямоугольный треугольник с катетом $R_2$ и гипотенузой $R_1$. Тогда второй его катет $R$ – это и есть радиус круга, который нам необходимо построить.

## Урок 46. Решение задач по теме «Площадь круга и кругового сектора»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме «Площадь круга и кругового сектора»; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

(Два ученика выполняют задания на доске во время фронтальной работы с классом.)

1) Вывести формулу для вычисления площади круга.

2) Вывести формулу для вычисления площади кругового сектора.

2. Фронтальная работа с классом.

– Какая формула используется для вычисления:

а) длины окружности;

б) длины дуги окружности;

в) площади круга;

г) площади кругового сектора, кругового сегмента;

д) стороны правильного $n$-угольника;

е) радиуса вписанной в правильный $n$-угольник окружности;

ж) площади правильного $n$-угольника?

– Чему равен угол правильного $n$-угольника?

– Чему равна сумма внешних углов правильного $n$-угольника?

(Заслушать учащихся, работавших у доски.)

### III. Определение темы и цели урока

### IV. Решение задач по готовым чертежам с последующей проверкой по готовым ответам

Найдите площади заштрихованных фигур.

1. *Дано:* $R_1 = 10$, $R_2 = 8$ (рис. 12.35).
2. *Дано:* $R_1 = 15$, $R_2 = 6$, $R_3 = 7$ (рис. 12.36).
3. *Дано:* $R = 5$ (рис. 12.37).
4. *Дано:* $R = 4$ (рис. 12.38).
5. *Дано:* $R_1 = 6$ (рис. 12.39).
6. *Дано:* $R_2 = 3$ (рис. 12.40).

***Ответы к задачам по готовым чертежам:***

1. $36\pi$. 2. $140\pi$. 3. $\frac{125\pi}{12}$. 4. $\frac{20\pi}{3} + 8$. 5. 18. 6. $27\pi$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены пять-шесть задач;
- оценка «4» — правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» — правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» — правильно решены менее двух задач.

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

### V. Решение задач

1. Работа в парах.

Решить задачу № 81 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

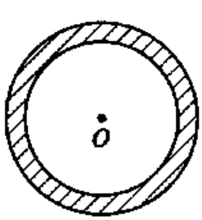



**Рис. 12.35**

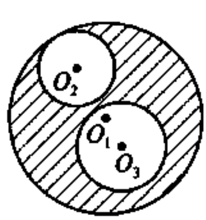



**Рис. 12.36**

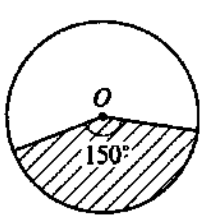



**Рис. 12.37**

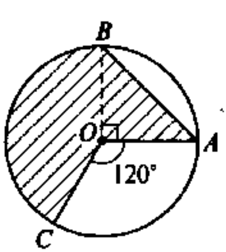



**Рис. 12.38**

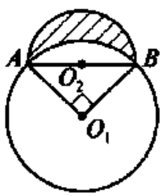



**Рис. 12.39**

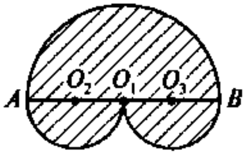



**Рис. 12.40**

2. Работа в группах.

Решить задачу № 1122 с последующим обсуждением.

***Задача № 1122***

*Решение:* $S_{дорожки} = S_1 - S_{клумбы}$, где $S_1$ – площадь дорожки и клумбы вместе. Клумба – это круг с радиусом 3 м. Клумба и дорожка – это круг с радиусом $3 + 1 = 4$ м.

Тогда $S_1 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ м$^2$.

$S_{клумбы} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ м$^2$.

$S_{дорожки} = 16\pi - 9\pi = 7\pi$ м$^2$.

На 1 м$^2$ дорожки требуется 0,8 дм$^3$ песка, тогда на всю дорожку потребуется $7\pi \cdot 0{,}8 = 5{,}6\pi$ дм$^3$ $\approx 17{,}6$ дм$^3$ песка.

*Ответ:* 17,6 дм$^3$ песка.

3. Самостоятельное решение задач.

*I уровень сложности:* задачи № 84 (рабочая тетрадь), № 1118, 1120 (учебник).

*II уровень сложности:* дополнительные задачи № 1–4.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** В треугольник со сторонами 5, 5, и 8 см вписана окружность (рис. 12.41). Вычислите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке, где $ABC$ – данный треугольник, $\omega(O, r)$ – указанная окружность.

*Ответ:* $12 - \frac{16}{9}\pi$.

***Задача 2.*** Найдите радиус кругового сектора, ограниченного дугой в 120°, площадь которого равна площади круга с радиусом 6.

*Ответ:* $6\sqrt{3}$.

***Задача 3.*** Окружность с центром $O_2$ касается хорды $AB$ и окружности с центром $O_1$ (рис. 12.42). Найдите площадь фигуры, заштрихованной на рисунке, если большая окружность имеет радиус, равный 8 см, $\angle AO_1B = 120°$.

*Ответ:* $\frac{52\pi - 48\sqrt{3}}{3}$.

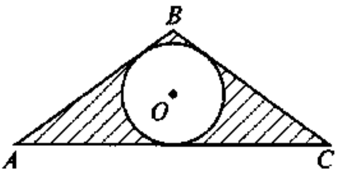



Рис. 12.41

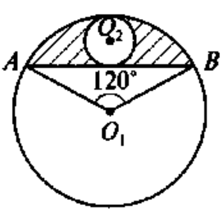



Рис. 12.42

*Задача 4.* Две окружности, имеющие общий центр, называются концентрическими. Данный круг разделить окружностью, концентрической его окружности, на две равные по площади части. *Указание.* $R_{мал} = R_{бол} \cdot \sqrt{2}$.

***Критерии оценивания:***

- оценка «5» — правильно решены три задачи;
- оценка «4» — правильно решены две задачи;
- оценка «3» — правильно решена одна задача;
- оценка «2» — все задачи решены неправильно.

(Обшая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за решение задач по готовым чертежам и за самостоятельное решение задач.)

### VI. Рефлексия учебной деятельности

Как вычислить площадь фигуры, полученной из комбинации круга и различных многоугольников?

### Домашнее задание

Рещить задачи № 1121, 1123, 1124 (учебник), № 83 (рабочая тетрадь).

## Урок 47. Обобщение по теме «Длина окружности. Площадь круга»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме «Площадь круга и крутового сектора»; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

Проверочный тест.

(Задания теста учащиеся выполняют самостоятельно с последующей самопроверкой и самооценкой.)

1. Установите, истинны или ложны следующие высказывания.

а) Длину окружности можно вычислить по формуле $C = \pi D$, где $D$ — радиус окружности.

б) Площадь круга равна произведению квадрата его радиуса на $\pi$.

в) Длина полуокружности диаметра 10 равна $5\pi$.

г) Площадь круга можно вычислить по формуле $S = \frac{\pi D^2}{2}$, где $D$ — диаметр круга.

д) Площадь круга радиуса 10 равна $10\pi$.

е) Длина дуги окружности с градусной мерой в 60° вычисляется по формуле $l = \frac{2\pi R}{3}$.

ж) Площадь кругового сектора, ограниченного дугой в 90°, вычисляется по формуле $S = \frac{\pi R^2}{4}$.

з) Если длина дуги окружности радиуса $R$ равна $\frac{\pi R}{4}$, то градусная мера этой дуги равна 90°.

2. Закончите утверждение.

а) Если диаметр окружности равен 6 см, то ее длина равна... .

б) Если диаметр круга увеличить в 4 раза, то его площадь увеличится в ... раз.

в) Если радиус окружности уменьшить на 3, то ее длина уменьшится на... .

г) Если радиус круга равен 6 см, то площадь его кругового сектора вычисляется по формуле... .

д) Площадь вписанного в окружность квадрата равна 16 см$^2$. Площадь круга, ограниченного данной окружностью, равна... .

е) Площадь описанного около окружности правильного четырехугольника равна 25. Длина этой окружности равна... .

ж) Диаметр окружности равен 8 см. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равен... .

з) Сторона правильного четырехугольника, вписанного в окружность, равна 10. Длина окружности равна... .

*Ответы к заданиям теста:*

1. Истинные высказывания: б, в, ж; ложные высказывания: а, г, д, е, з.

2. а) $6\pi$; б) 16; в) $6\pi$; г) $\frac{\pi\alpha}{10}$; д) $8\pi$; е) $5\pi$; ж) 24; з) $10\sqrt{2}\pi$.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание (одно задание – одна буква) ставится 1 балл.

- оценка «5» – 15–16 баллов;
- оценка «4» – 11–14 баллов;
- оценка «3» – 7–10 баллов;
- оценка «2» – менее 7 баллов.

**III. Проверка домашнего задания**

(Учитель заранее готовит неправильное решение задач № 1121, 1124 на доске. Ученики должны найти ошибки.)

***Задача № 1121***

*Дано:* Круг $(O, R_2)$, $S_2 = 314$ мм$^2$; круг $(O, R_1)$, $D_1 = 18{,}5$ мм.
*Найти:* $R_2 - R_1$.

*Решение:* $S_2 = \pi R_2^2 = 314 \Rightarrow R_2^2 = \dfrac{314}{\pi} \approx 100 \Rightarrow R_2 = 10$ мм.

$D_1 = 18{,}5$ мм; $D_2 = 2R_2 = 20$ мм.
$R_2 - R_1 = D_2 - D_1 = 20 - 18{,}5 = 1{,}5$ мм.
*Ответ:* 1,5 мм.

***Задача № 1124*** (рис. 12.43)

*Решение:*
$R_1 = 1 \Rightarrow S_1 = \pi R_1^2 = \pi$.
$R_2 = 2 \Rightarrow S_2 = \pi R_2^2 = 4\pi \Rightarrow S_{\text{кольца 1}} = S_2 - S_1 = 4\pi - \pi = 3\pi$.
$R_3 = 3 \Rightarrow S_3 = \pi R_3^2 = 9\pi \Rightarrow S_{\text{кольца 2}} = S_3 - S_1 = 9\pi - \pi = 8\pi$.
$R_4 = 4 \Rightarrow S_4 = \pi R_4^2 = 16\pi \Rightarrow S_{\text{кольца 3}} = S_4 - S_1 = 16\pi - \pi = 15\pi$.
*Ответ:* $\pi$; $3\pi$; $8\pi$; $15\pi$.

## IV. Определение темы и цели урока

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## V. Решение задач

1. Работа в парах.

Решить задачу № 85 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

2. Работа в группах.

Решить задачу с последующим обсуждением.

На рис. 12.44 изображен полукруг с диаметром $AD$. $\smile AB = \smile CD$, $\smile BC = 90°$, площадь заштрихованной фигуры равна $16\pi$. Найдите длину дуги $BC$.

Вопросы для обсуждения.

– Нельзя ли заштрихованную фигуру разбить на такие фигуры, площади которых мы умеем вычислять?

*Ответ:* Проведем радиусы $OB$ и $OC$. Получим круговой сектор $OCD$, треугольник $AOC$ и фигуру, ограниченную дугой $AB$ и хордой $AB$ (рис. 12.45).

– Как найти площадь кругового сектора $OCD$?


**Рис. 12.43**

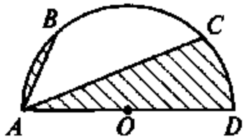



**Рис. 12.44**

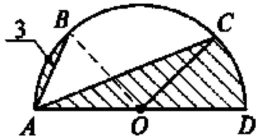



**Рис. 12.45**

*Ответ:* Так как $\cup CD = 45°$, то $S_{OCD} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot 45° = \frac{\pi R^2}{8}$.

– Как найти площадь $\Delta AOC$?

*Ответ:* $\angle AOC = 180° - \angle COD = 180° - 45° = 135°$. $S_{AOC} = \frac{1}{2} \times$

$\times\ OA \cdot OC \cdot \sin\angle AOC = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{4} R^2$.

– Как найти площадь фигуры, ограниченной дугой $AB$ и хордой $AB$?

*Ответ:*

$S_{\text{фигуры 3}} = S_{\text{кр. сектора AOB}} - S\Delta_{AOB}$.

$S_{\text{кр. сектора AOB}} = S_{\text{кр. сектора OCD}} = \frac{\pi R^2}{8}$.

$S\Delta_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4} R^2$.

$S_{\text{фигуры 3}} = \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} R^2$.

– Чему равна площадь заштрихованной фигуры?

*Ответ:* $S = S_{OCD} + S_{AOC} + S_{\text{фигуры 3}} = \frac{\pi R^2}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} R^2 + \frac{\pi R^2}{8} -$

$- \frac{\sqrt{2}}{4} R^2 = \frac{\pi R^2}{4}$.

– Что нужно знать для вычисления длины дуги $BC$?

*Ответ:* Радиус окружности.

– Можно ли найти радиус окружности?

*Ответ:* По условию задачи площадь заштрихованной фигуры равна $16\pi$, а мы получили $\frac{\pi R^2}{4}$, т. е. $\frac{\pi R^2}{4} = 16\pi$, откуда $R^2 = 64$, значит, $R = 8$.

– Чему равна длина дуги $BC$?

*Ответ:* $l_{\cup BC} = \frac{\pi R}{180} \cdot 45 = \frac{\pi \cdot 8}{4} = 2\pi$.

## VI. Самостоятельная работа с последующей проверкой по готовым ответам

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Длина окружности равна $8\pi$. Вычислите площадь круга, ограниченного данной окружностью.

2. Градусная мера дуги окружности с радиусом 6 см равна 30°. Вычислите площадь кругового сектора, соответствующего этой дуге.

***Вариант 2***

1. Длина окружности равна $10\pi$. Вычислите площадь круга, ограниченного данной окружностью.

2. Градусная мера дуги окружности с радиусом 4 см равна 45°. Вычислите площадь кругового сектора, соответствующего этой дуге.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Площадь круга равна $324\pi$. Вычислите длину окружности, радиус которой в три раза меньше радиуса круга.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной дугой $AB$ и хордой $AB$, если градусная мера дуги равна 30°, а радиус окружности равен 6 см.

***Вариант 2***

1. Площадь круга равна $256\pi$. Вычислите длину окружности, радиус которой в два раза больше радиуса круга.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной дугой $CD$ и хордой $CD$, если градусная мера дуги равна 150°, а радиус окружности равен 12 см.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Как изменится площадь круга, если длина соответствующей ему окружности уменьшится в 5 раз?

2. Вычислите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $AC$ – диаметр окружности с центром $O$, $BH = 6$, $HC = 4$ (рис. 12.46).

***Вариант 2***

1. Как изменится длина окружности, если площадь соответствующего ей круга увеличится в 36 раз?

2. Вычислите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $MK$ – диаметр окружности с центром $O$, $MH = 4$, $NH = 8$ (рис. 12.47).

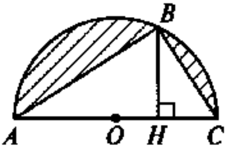


Рис. 12.46

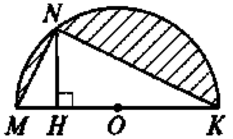


Рис. 12.47

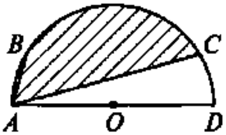


Рис. 12.48

***Ответы к задачам самостоятельной работы по готовым ответам:***

**I уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. $16\pi$. | 1. $25\pi$. |
| 2. $3\pi$ см$^2$. | 2. $2\pi$ см$^2$. |

**II уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. $12\pi$. | 1. $64\pi$. |
| 2. $3\pi - 9$ см$^2$. | 2. $60\pi - 36$ см$^2$. |

**III уровень сложности**

| ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** |
|---|---|
| 1. Уменьшится в 25 раз. | 1. Увеличится в 6 раз. |
| 2. $20{,}125\pi - 39$. | 2. $50\pi - 80$. |

### VII. Рефлексия учебной деятельности

Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе по готовым ответам.

### Домашнее задание

Решить задачи № 1125, 1127, 1128 (учебник), дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

Найдите площадь заштрихованной фигуры, если известно, что площадь полукруга с диаметром $AD$ равна $8\pi$, $\cup BC = 120°$, $\cup AB = \cup CD$ (рис. 12.48).

*Ответ:* $\dfrac{16\pi}{3}$.

## Урок 48. Решение задач по теме «Длина окружности и площадь круга»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме «Длина окружности и площадь круга»; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверочный тест

(Задания теста учащиеся выполняют самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справились большинство учащихся. Учащиеся решают задания в тетрадях, ответы выписывают на листочки и сдают на проверку учителю, правильность своих ответов проверяют по тетрадям.)

***Вариант 1***

1. Четырехугольник является правильным, если:
   а) все его углы равны между собой;
   б) все его стороны равны между собой;
   в) все его углы равны между собой и все его стороны равны между собой.

2. Длина окружности больше диаметра в:
   а) $2\pi$ раз; б) $\pi$ раз; в) 2 раза.

3. Длина дуги окружности вычисляется по формуле:
   а) $l = \dfrac{\pi R\alpha}{180}$; б) $l = \dfrac{\pi R\alpha}{360}$; в) $l = \dfrac{\pi R^2\alpha}{180}$.

4. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность с радиусом $R$, равна:
   а) $R\sqrt{2}$; б) $R\sqrt{3}$; в) $R$.

5. Отношение радиуса вписанной к радиусу описанной около квадрата окружности равно:
   а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) 2; в) $\sqrt{2}$.

6. Отношение радиуса описанной к радиусу вписанной в правильный шестиугольник окружности равно:
   а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Каждый угол правильного десятиугольника равен:
   а) 140°; б) 135°; в) 144°.

8. Внешний угол правильного двенадцатиугольника равен:
   а) 36°; б) 30°; в) 45°.

9. Из круга, радиус которого равен 20 см, вырезан сектор. Дуга сектора равна 90°. Чему равна площадь оставшейся части круга?
   а) $100\pi$ см$^2$; б) $400\pi$ см$^2$; в) $300\pi$ см$^2$.

10. Длина дуги окружности с радиусом 12 см и градусной мерой 100° равна:
   а) $\dfrac{20\pi}{3}$ см; б) $\dfrac{10\pi}{3}$ см; в) $\dfrac{\pi}{15}$ см.

***Вариант 2***

1. Если в четырехугольнике все стороны равны, то он:
   а) всегда является правильным;

б) может быть правильным;

в) никогда не является правильным.

2. Длина окружности больше радиуса в:

а) $2\pi$ раз; б) $\pi$ раз; в) 2 раза.

3. Площадь кругового сектора вычисляется по формуле:

а) $S=\dfrac{\pi R^2\alpha}{180}$; б) $S=\dfrac{\pi R\alpha}{180}$; в) $S=\dfrac{\pi R^2\alpha}{360}$.

4. Сторона правильного четырехугольника, вписанного в окружность с радиусом $R$, равна:

а) $R$; б) $R\sqrt{2}$; в) $R\sqrt{3}$.

5. Отношение радиуса описанной к радиусу вписанной в квадрат окружности равно:

а) 2; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{2}$.

6. Отношение радиуса вписанной к радиусу описанной около правильного шестиугольника окружности равно:

а) $\sqrt{3}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

7. Каждый угол правильного восьмиугольника равен:

а) 135°; б) 144°; в) 140°.

8. Внешний угол правильного двадцатиугольника равен:

а) 20°; б) 22,5°; в) 18°.

9. Из круга, радиус которого равен 30 см, вырезан сектор. Дуга сектора равна 60°. Чему равна площадь оставшейся части круга?

а) $150\pi$ см$^2$; б) $750\pi$ см$^2$; в) $900\pi$ см$^2$.

10. Длина дуги окружности с радиусом 6 см и градусной мерой 135° равна:

а) $\dfrac{9\pi}{2}$ см; б) $9\pi$ см; в) $\dfrac{9\pi}{4}$ см.

*Ответы к тесту:*

***Вариант 1:*** 1 – в; 2 – б; 3 – а; 4 – б; 5 – а; 6 – а; 7 – в; 8 – б; 9 – в; 10 – а.

***Вариант 2:*** 1 – б; 2 – а; 3 – в; 4 – б; 5 – в; 6 – б; 7 – а; 8 – в; 9 – б; 10 – а.

***Критерии оценивания:***

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 9–10 баллов;
- оценка «4» – 7–8 баллов;
- оценка «3» – 5–6 баллов;
- оценка «2» – менее 5 баллов.

## III. Определение темы и цели урока

## IV. Решение задач

(Учитель предлагает учащимся задания трех уровней сложности, в зависимости от уровня подготовленности. ***I уровень*** сложности – наиболее простые задачи. Учащиеся работают самостоятельно под контролем учителя. ***II уровень*** сложности – задачи средней степени сложности. Учитель в процессе решения по необходимости оказывает индивидуальную помощь учащимся. ***III уровень*** сложности – задачи повышенной сложности. Учащиеся работают самостоятельно, в конце урока сдают тетради на проверку учителю.)

**I уровень сложности**

1. Вычислите внутренний и внешний углы правильного двадцатисемиугольника.

2. Сколько сторон имеет правильный $n$-угольник, если: а) его внутренний угол равен 170°; б) его внешний угол равен 12°?

3. Около квадрата со стороной $2\sqrt{2}$ см описана окружность, которая вписана в правильный треугольник. Найдите площадь треугольника.

4. Внутри окружности с радиусом 8 см расположены две окружности, касающиеся друг друга внешним образом, каждая из которых касается большей окружности внутренним образом, причем все точки касания и радиусы всех трех окружностей лежат на одной прямой (рис. 12.49). Найдите площадь заштрихованной фигуры.

5. $ABCD$ – квадрат со стороной 5 см (рис. 12.50). Определите площади фигур, которые получились путем проведения данных дуг окружностей с центрами в точках $B$ и $D$.

**II уровень сложности**

1. Может ли внутренний угол правильного многоугольника быть равен 178,4°?

2. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали $BE$ и $BD$ пересекают диагональ $AC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Найдите отношение $AM : MN$.

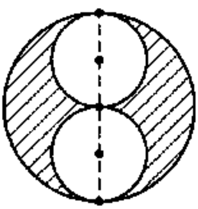


**Рис. 12.49**

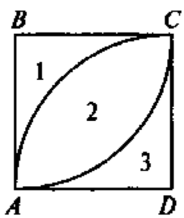



**Рис. 12.50**

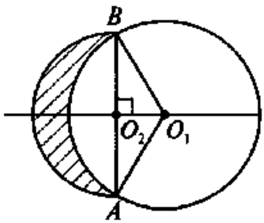



**Рис. 12.51**

3. В квадрат, площадь которого равна $25^2$ см, вписана окружность. Определите площадь правильного восьмиугольника, вписанного в эту окружность.

4. На окружности радиуса $R$ последовательно отмечены точки $A$, $B$, $C$, $D$, которые делят окружность на дуги $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, отношение которых равно $1 : 3 : 5 : 9$. Определите длины этих дуг и площади ограниченных ими секторов.

5. Определите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $O_1$ – центр окружности с радиусом 4 см, $\angle AO_1B = 120°$, $O_2$ – центр окружности с диаметром $AB$ (рис. 12.51).

**III уровень сложности**

1. Отрезок длины $a$ является стороной правильного четырехугольника и правильного восьмиугольника. Найдите отношение их площадей.

2. Около одной окружности описаны правильный восьмиугольник и правильный двенадцатиугольник. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около этих многоугольников.

3. Внутри окружности радиуса $R$ расположены три окружности радиуса $r$, касающиеся друг друга внешним образом, каждая из которых касается большей окружности внутренним образом. Определите разность площади большей окружности и суммы площадей меньших окружностей.

4. Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $5\sqrt{3}$. Найдите площадь шестиугольника.

5. В некотором многоугольнике можно провести 20 диагоналей. Найдите число сторон этого многоугольника.

*Ответы к задачам:*

**I уровень сложности**

1. $\frac{500°}{3}$; $\frac{40°}{3}$. 2. а) $n = 36$; б) $n = 30$. 3. $12\sqrt{3}$ см². 4. $32\pi$ см². 5. $S_1 = S_3 = \frac{100 - 25\pi}{4}$; $S_2 = \frac{50\pi - 100}{4}$.

**II уровень сложности**

1. Да, при $n = 225$. 2. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 3. $\frac{25\sqrt{2}}{2}$. 4. $\frac{\pi R}{9}$, $\frac{\pi R}{3}$, $\frac{5\pi R}{9}$, $\pi R$, $\frac{\pi R^2}{18}$, $\frac{\pi R^2}{6}$, $\frac{5\pi R^2}{18}$, $\frac{\pi R^2}{2}$. 5. $\frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{3}$.

**III уровень сложности**

1. $4(\sqrt{2} - 1)$. 2. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. 3. $\frac{\pi R^2 - 3\pi r^2}{3}$. 4. $\frac{75\sqrt{3}}{8}$. 5. 8.

**I уровень сложности**

- оценка «5» – правильно решены пять задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

**II уровень сложности**

- оценка «5» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

**III уровень сложности**

- оценка «5» – правильно решены четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «3» – правильно решены одна-две задачи;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение проверочного теста и за самостоятельное решение задач.)

### V. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 1129 (а, в), 1130, 1131, 1135 (учебник); II уровень сложности: № 1132 (б), 1133, 1134, 1136.

## Урок 49. Подготовка к контрольной работе по теме «Длина окружности и площадь круга»

***Основные дидактические цели урока:*** закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки, подготовить учащихся к контрольной работе; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Проверочный тест

(Задания теста учащиеся выполняют самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением заданий, с которыми не справилось большинство учащихся.)

1. Один из внутренних углов правильного $n$-угольника равен 150°. Найдите число сторон многоугольника.

а) 9; б) 14; в) 12; г) 15.

2. Периметр правильного треугольника равен $12\sqrt{3}$ см. Найдите радиус вписанной окружности.

а) 2 см; б) 4 см; в) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см; г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ см.

3. Около квадрата описана окружность и в квадрат вписана окружность. Найдите отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности.

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{2}$; в) 2; г) $\frac{1}{2}$.

4. Сторона правильного шестиугольника равна 2 м. На сколько площадь описанного круга больше площади вписанного круга?

а) $3\sqrt{3}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; в) $6\sqrt{3}$; г) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. Площадь полуокружности с центром в точке $O$ равна $8\pi$ (рис. 12.52). Найдите площадь заштрихованной фигуры.

а) $16\pi$; в) $4\pi$;
б) $8\pi$; г) $32\pi$.

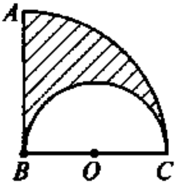


Рис. 12.52

6. В окружность вписаны квадрат и правильный треугольник. Периметр треугольника равен 30 см, периметр квадрата равен:

а) $\frac{40\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{40}{3}$; г) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$.

*Ответы к тесту:*

1 – в; 2 – а; 3 – б; 4 – г; 5 – б; 6 – а.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 5–6 баллов;
- оценка «4» – 4 балла;
- оценка «3» – 2–3 балла;
- оценка «2» – менее 2 баллов.

## III. Определение темы и цели урока

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## IV. Решение задач

Работа в группах.

Решить задачи с последующим обсуждением.

(Учитель в процессе решения по необходимости оказывает индивидуальную помощь учащимся.)

***Задача 1.*** Площадь правильного треугольника больше площади вписанного в него круга на $27\sqrt{3} - 9\pi$. Найдите радиус круга.

*Решение:* Пусть радиус вписанного круга равен $r$. Тогда площадь круга равна $S = \pi r^2$.

Сторона правильного треугольника, описанного около круга, $a_3 = 2r\text{tg}\frac{180°}{3} = 2\sqrt{3}r$.

Тогда $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a_3 \cdot a_3 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}r^2$.

$S_\Delta - S_{кр} = 3\sqrt{3}r^2 - \pi r^2 = r^2(3\sqrt{3} - \pi)$.

По условию задачи $S_\Delta - S_{кр} = 27\sqrt{3} - 9\pi = 9(3\sqrt{3} - \pi)$, тогда $r^2(3\sqrt{3} - \pi) = 9(3\sqrt{3} - \pi)$, $r = 3$.

*Ответ:* 3.

Вопросы для обсуждения.

– Чему равна сторона правильного треугольника, описанного около круга радиуса $r$?
– Выразите площадь треугольника через $r$.
– Чему равна площадь круга радиуса $r$?
– Чему равна разность площадей треугольника и вписанного в него круга?
– Найдите радиус $r$.

***Задача 2.*** В сектор с центральным углом в 60° и радиусом, равным 6 см, вписана окружность. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рис. 12.53.

*Решение:* Так как окружность вписана в сектор, то $OA$ и $OB$ – касательные к окружности, тогда $OO_1$ – биссектриса $\angle COD$, $OC \perp OA$ (рис. 12.54).

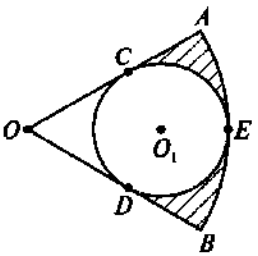



**Рис. 12.53**

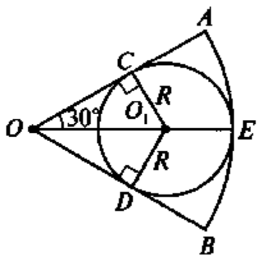



**Рис. 12.54**

В $\Delta OCO_1$ $\angle COO_1 = 30°$, $CO_1 = R$, следовательно, $OO_1 = 2R$. $OE = OO_1 + O_1E = 2R + R = 3R = 6$, тогда $3R = 2$ см, $OO_1 = 4$ см.

$S_{OCO_1} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot O_1C.$

По теореме Пифагора $OC^2 = OO_1^2 - CO_1^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow$ $OC = 2\sqrt{3}$ см $\Rightarrow S_{OCO_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ см².

$S_{OCO_1D} = 2 \cdot S_{OCO_1} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ см².

Найдем площадь кругового сектора, ограниченного дугой $CDE$. $S_{\text{сектор CDE}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot 240° = \frac{4\pi}{3} \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$ см².

Найдем площадь кругового сектора, ограниченного дугой $AEB$. $S_{\text{сектор AEB}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot 60° = \frac{36\pi}{6} = 6\pi$ см².

$S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектор AEB}} - S_{OCO_1D} - S_{\text{сектор CDE}} = 6\pi - 4\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ см².

*Ответ:* $\frac{10\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ см².

Вопросы для обсуждения.

- Чем являются радиусы $OA$ и $OB$ кругового сектора с дугой $AEB$?
- Постройте $\Delta OCO_1$. Какие элементы в данном треугольнике известны?
- Как найти площадь не заштрихованной фигуры?
- Как найти площадь кругового сектора с дугой $AEB$?

### V. Самостоятельное решение задач

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и стягивающей ее хордой, если длина хорды равна 6 м, а градусная мера дуги равна 120°.

2. Две окружности, имеющие радиусы 4 и 12 см, внешне касаются, $AB$ – их общая касательная. Найдите площадь фигуры, заключенной между этими окружностями и их общей касательной $AB$ ($A$ и $B$ – точки касания).

3. Данный круг разделить двумя окружностями, концентрическими окружностям круга, на три части, имеющие равные площади.

4. Большая диагональ ромба равна 24 см, а один из углов равен 60°. Найдите длину вписанной окружности.

5. Найдите площадь круга, описанного около трапеции, стороны которой равны $a$ см, $a$ см, $a$ см, $2a$ см.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены пять задач;
- оценка «4» — правильно решены четыре задачи;
- оценка «3» — правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» — правильно решены менее двух задач.

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение теста и за самостоятельное решение задач)

### VI. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

### Домашнее задание

Решить задачи. I уровень сложности: № 1137–1139 (учебник); II уровень сложности: № 1140–1143.

## Урок 50. Контрольная работа № 4 по теме «Длина окружности и площадь круга»

***Основная дидактическая цель урока:*** проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Длина окружности и площадь круга».

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Контрольная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Найдите площадь круга и длину ограничивающей его окружности, если сторона правильного треугольника, вписанного в него, равна $5\sqrt{3}$ см.

2. Вычислите длину дуги окружности с радиусом 4 см, если ее градусная мера равна 120°. Чему равна площадь соответствующего данной дуге кругового сектора?

3. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен $6\sqrt{3}$ дм. Найдите периметр правильного шестиугольника, описанного около той же окружности.

4*. Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $BC = 4$, $\angle BAC = 30°$, $O$ — центр окружности (рис. 12.55).

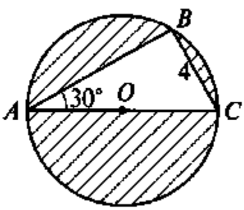



Рис. 12.55

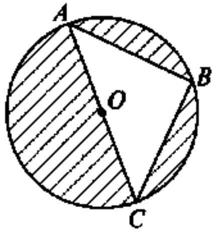



Рис. 12.56

***Вариант 2***

1. Найдите площадь круга и длину ограничивающей его окружности, если сторона квадрата, описанного около него, равна 6 см.

2. Вычислите длину дуги окружности с радиусом 10 см, если ее градусная мера равна 150°. Чему равна площадь соответствующего данной дуге кругового сектора?

3. Периметр квадрата, описанного около окружности, равен 16 дм. Найдите периметр правильного пятиугольника, вписанного в эту же окружность.

4*. Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $O$ – центр окружности с диаметром $10\sqrt{2}$ (рис. 12.56).

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Около правильного треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Найдите площадь меньшего круга и длину окружности, ограничивающей его, если радиус большей окружности равен $4\sqrt{3}$ см.

2. Длина дуги окружности с градусной мерой 120° равна $8\pi$ см. Вычислите площадь соответствующего данной дуге кругового сектора.

3. Вычислите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $AO = 4$ см, $\angle AOB = 135°$ (рис. 12.57).

4*. Периметр правильного четырехугольника, вписанного в окружность, на $16(\sqrt{2} - 1)$ см меньше периметра правильного четырехугольника, описанного около этой же окружности. Найдите радиус окружности.

***Вариант 2***

1. Около правильного шестиугольника описана окружность и в него вписана окружность. Найдите площадь меньшего круга и длину окружности, ограничивающей его, если радиус большей окружности равен $6\sqrt{3}$ см.

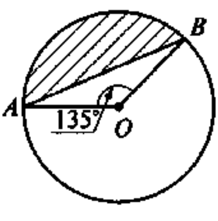



Рис. 12.57

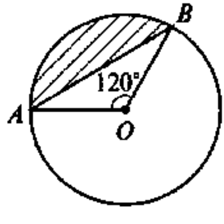



Рис. 12.58

2. Длина дуги окружности с градусной мерой 150° равна $10\pi$ см. Вычислите площадь соответствующего данной дуге кругового сектора.

3. Вычислите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $BO = 3$ см, $\angle AOB = 120°$ (рис. 12.58).

4*. Периметр правильного треугольника, описанного около окружности, на $18\sqrt{5}$ см больше периметра правильного треугольника, вписанного в эту же окружность. Найдите радиус окружности.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Вписанный в круг квадрат разделил его на пять частей. Найдите отношение площади меньщей из полученных частей к площади большей, если сторона квадрата равна 8.

2. Центр окружности совпадает с вершиной квадрата, а ее радиус равен 60% стороны квадрата. В каком отношении дуга окружности, расположенная внутри квадрата, делит его площадь?

3. Из точки $A$ к окружности с центром $O$ и радиусом, равным 6 см, проведены две касательные $AB$ и $AC$, образующие между собой угол в 120°. Найдите периметр и площадь фигуры, ограниченной отрезками $AB$ и $AC$ и дугой $BC$ окружности, если центр окружности не содержится во внутренней области полученной фигуры.

4*. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и $\sqrt{3}$ равно 1. Найдите площади образовавшихся луночек и общей части кругов.

***Вариант 2***

1. Вписанный в круг правильный треугольник разделил его на четыре части. Найдите отношение площади большей из полученных частей к площади меньшей, если сторона треугольника равна $4\sqrt{3}$.

2. Центр окружности совпадает с вершиной равностороннего треугольника, а ее радиус равен 60% стороны треугольника.

В каком отношении дуга окружности, расположенная внутри треугольника, делит его площадь?

3. Из точки $A$ к окружности с центром $O$ и радиусом, равным 8 см, проведены две касательные $AB$ и $AC$, образующие между собой угол в 60°. Найдите периметр и площадь фигуры, ограниченной отрезками $AB$ и $AC$ и дугой $BC$ окружности, если центр окружности содержится во внутренней области полученной фигуры.

4*. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 1 равно $\sqrt{3}$. Найдите площади образовавшихся луночек и общей части кругов.

***Ответы к задачам контрольной работы:***

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $S = 25\pi$ см$^2$; $C = 10\pi$ см.
2. $C = 4\pi$ см; $S = \frac{16\pi}{3}$ см$^2$.
3. $8\sqrt{3}$ дм.
4. $16\pi - 8\sqrt{3}$.

***Вариант 2***

1. $S = 9\pi$ см$^2$; $C = 6\pi$ см.
2. $C = \frac{25\pi}{3}$ см; $S = \frac{125\pi}{3}$ см$^2$.
3. $9\sqrt{3}$ дм.
4. $50\pi - 50$.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $S = 12\pi$ см$^2$; $C = 4\sqrt{3}\pi$ см.
2. $48\pi$ см$^2$.
3. $(6\pi - 4\sqrt{2})$ см$^2$.
4. $2\sqrt{2}$ см.

***Вариант 2***

1. $S = 81\pi$ см$^2$; $C = 18\pi$ см.
2. $60\pi$ см$^2$.
3. $\left(3\pi - \frac{9}{4}\right)$ см$^2$.
4. $2\sqrt{15}$ см.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. $\frac{\pi - 2}{8}$.
2. $\frac{100 - 9\pi}{9\pi}$.
3. $P = (4\sqrt{3} + 2\pi)$ см; $S = (12\sqrt{3} - 6\pi)$ см$^2$.
4. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$; $\frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}$; $\frac{17\pi}{6} - \sqrt{3}$.

***Вариант 2***

1. $\frac{9\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$.

2. $\dfrac{25\sqrt{3}-6\pi}{6\pi}$.

3. $P=\left(8\sqrt{3}+\dfrac{8\pi}{3}\right)$ см; $S=\left(64\sqrt{3}+\dfrac{128\pi}{3}\right)$ см$^2$.

4. $\dfrac{17\pi}{6}+\sqrt{3}$; $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{6}-\sqrt{3}$.

**III. Рефлексия учебной деятельности**

В конце урока учитель раздает на каждую парту ответы к задачам контрольной работы.

**Домашнее задание**

Решить контрольную работу следующего уровня сложности.

# Глава XIII
# ДВИЖЕНИЯ

***Формируемые УУД:*** ***предметные:*** ввести понятия отображения плоскости на себя, движения, наложения; познакомить учащихся с понятием движения на плоскости: осевой и центральной симметриями, параллельным переносом, поворотом; рассмотреть свойства движений и научить учащихся применять свойства движений при решении задач; выработать навыки построения образов точек, отрезков, треугольников при симметриях, параллельном переносе, повороте; ***метапредметные:*** анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал; извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; ***личностные:*** овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

## Урок 51. Понятие движения

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия отображения плоскости на себя и движения; рассмотреть осевую и центральную симметрии.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок контрольной работы

(Разобрать задания, с которыми не справилось большинство учащихся. Работу над ошибками рекомендуется выполнить дома.)

### III. Определение темы урока

(Повторение темы «Центральная и осевая симметрия» (курс математики за 6 класс).)

Работа в группах.

Выполнить задания с последующим обсуждением.

1. На координатной плоскости имеются точки $A(2;\ 3)$, $B(-4;\ 6)$, $C(2;\ 0)$, $D(0;\ -5)$ (рис. 13.1). Отметьте точки:

   а) симметричные $A$ и $D$ относительно оси $Oy$;

   б) симметричные $B$ и $C$ относительно оси $Ox$;

   в) симметричные $A$ и $B$ относительно начала координат.

2. Постройте точки, симметричные точкам $A$ и $B$ относительно прямой $l$ (рис. 13.2).

3. Постройте фигуры, симметричные данным относительно прямой $l$ (рис. 13.3).

4. Постройте точки, симметричные данным относительно точки $O$ (рис. 13.4).

5. Постройте фигуры, симметричные данным относительно точки $O$ (рис. 13.5).

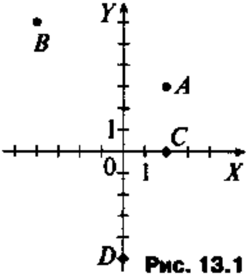


Рис. 13.1

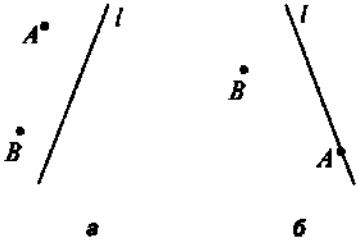


Рис. 13.2

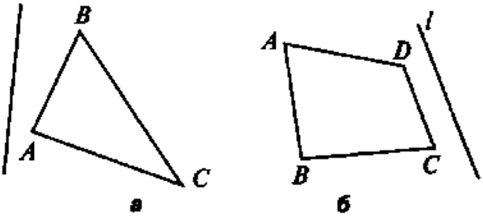


Рис. 13.3

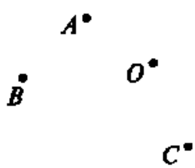
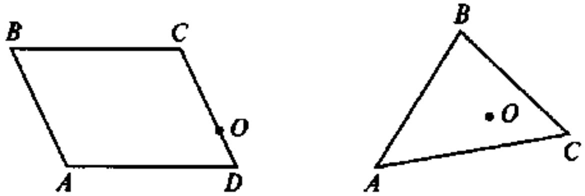


Рис. 13.4




а б

Рис. 13.5

6. Какие условия должны выполняться, чтобы точка $A_1$ была симметричной точке $A$ относительно:

а) прямой $l$;

б) точки $O$?

7. Существуют ли точки, для которых не существует точек, симметричных относительно: а) прямой; б) точки?

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

**IV. Работа по теме урока**

1. Беседа с классом.

Симметрия – это сохранение свойств расположения элементов фигуры относительно центра или оси симметрии в неизменном состоянии при каких-либо преобразованиях. Все живые организмы в той или иной степени отвечают законам симметрии: люди, животные, рыбы, птицы, насекомые – все построено по ее законам. Практически симметричны снежинки, кристаллы, листья, плоды, даже наша шарообразная планета обладает почти идеальной симметрией. Существует большое количество видов симметрии, но все они неизменно отвечают одному общему правилу: при некотором преобразовании симметричный объект неизменно совмещается сам с собой. При изучении данной главы мы с вами познакомимся с различными преобразованиями геометрических фигур.

2. Ввести понятие отображения плоскости на себя.

Пусть каждой точке плоскости ставится в соответствие какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке. В таком случае говорят, что дано отображение плоскости на себя. Приведите примеры из курса геометрии, когда мы встречаемся с отображением плоскости на себя. (*Осевая симметрия, центральная симметрия.*)

– Докажите, что осевая симметрия есть отображение плоскости на себя.

Примерный ход рассуждений.

Пусть имеется прямая $l$, являющаяся осью симметрии. Тогда произвольной точке $X$ ставится в соответствие точка $X_1$ следующим образом: из точки $X$ нужно провести перпендикулярную прямую к прямой $l$, и от точки пересечения этих прямых ($Y$) отложить на прямой $XY$ отрезок $YX_1$, равный $XY$. Точка $X_1$ – искомая. Любой точке $X$ можно сопоставить точку $X_1$, так как от любой точки можно опустить перпендикуляр на данную прямую. В случае, если точка $X$ лежит на прямой $l$, то она сопоставляется сама себе.

***Вывод.*** Осевая симметрия является отображением плоскости на себя.

– Является ли центральная симметрия отображением плоскости на себя? (***Центральная симметрия есть отображение плоскости на себя.***)

Если $O$ – центр симметрии, $X$ – произвольная точка плоскости, то точке $X$ будем сопоставлять точку $X_1$ следующим образом: соединим точки $X$ и $O$ отрезком и продолжим его за точку $O$ на расстояние, равное $OX$, отметим точку $X_1$. $X_1$ – искомая точка. Очевидно, что для каждой точки $X$ найдется симметричная ей точка относительно точки $O$. Точка $O$ симметрична сама себе.

3. Ввести понятие движения.

– Каким общим свойством обладают осевая и центральная симметрии?

Наводящие вопросы к заданиям с последующим обсуждением.

– Вернемся к заданию 3. В какую фигуру отобразился $\Delta ABC$ при осевой симметрии? А четырехугольник $ABCD$?
– В задании 5 нужно было построить фигуры, симметричные данным относительно точки. В какую фигуру отобразился четырехугольник $ABCD$? А $\Delta ABC$?
– Сохранилось ли расстояние между двумя точками при осевой симметрии?
– Сохранилось ли расстояние между двумя точками при центральной симметрии?

*Определение:* Отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние, называют движением.

4. Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы. Дать на обдумывание 2–3 мин, а затем заслушать варианты ответов.)

1) Пусть $M$ и $N$ какие-либо точки, $l$ – ось симметрии. $M_1$ и $N_1$ – точки, симметричные точкам $M$ и $N$ относительно прямой $l$. Докажите, что расстояние между точками $M$ и $N$ при осевой симметрии сохраняется, т. е. $MN = M_1N_1$.

Наводящие вопросы (рис. 13.6).

а) Из точек $N$ и $N_1$ опустите перпендикуляры на прямую $MM_1$.

б) Докажите, что $\Delta MNK = \Delta M_1N_1K_1$.

в) Докажите, что $MK = M_1K_1$, $NK = N_1K_1$.

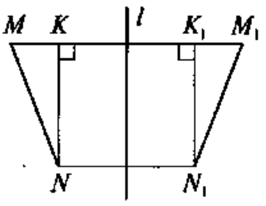



Рис. 13.6

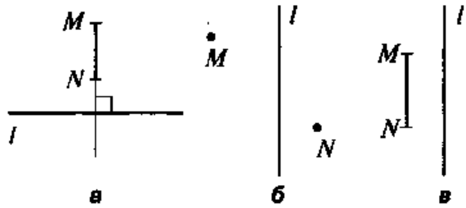



Рис. 13.7

2) Докажите, что центральная симметрия есть движение.

Наводящие вопросы.

а) Возьмите точки $M$ и $N$ и $O$ – центр симметрии.

б) Постройте точки $M_1$ и $N_1$, симметричные точкам $M$ и $N$ относительно точки $O$.

в) Докажите, что $\Delta OMN = \Delta OM_1N_1$.

5. Самостоятельное решение задач.

Докажите, что осевая симметрия есть движение для следующего расположения точек $M$ и $N$ (рис. 13.7).

### V. Рефлексия учебной деятельности

1. Что называют движением?
2. Сформулируйте определение осевой симметрии.
3. Сформулируйте определение центральной симметрии.
4. Является ли центральная симметрия движением?
5. Является ли осевая симметрия движением?

### Домашнее задание

1. П. 117, 118 (до теоремы), вопросы 1–6 (учебник, с. 297).
2. Решить задачи № 1148 (а), 1149 (б) (учебник), задачи № 86, 87 (рабочая тетрадь).

## Урок 52. Свойства движений

***Основные дидактические цели урока:*** рассмотреть свойства движений; научить учащихся применять свойства движений при решении задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

1) Сформулируйте определение отображения плоскости на себя.

2) Приведите примеры отображения плоскости на себя.
3) Докажите, что осевая (центральная) симметрия является отображением плоскости на себя.
4) Что такое движение?
5) Являются ли осевая и центральная симметрии движениями?

2. Индивидуальная работа у доски.

(Два ученика готовят ответы на вопросы во время проведения устного теоретического опроса.)

– Какое отображение плоскости называют осевой симметрией? Докажите, что осевая симметрия есть движение.
– Какое отображение плоскости называют центральной симметрией? Докажите, что центральная симметрия есть движение.

3. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три ученика получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проведения устного теоретического опрос и индивидуальной работы у доски.)

**I уровень сложности**

1. Постройте фигуру, симметричную данной (рис. 13.8) относительно точки *O*.

2. Постройте фигуру, симметричную данной (рис. 13.9) относительно прямой *l*.

**II уровень сложности**

1. Постройте тупоугольный треугольник и его образ при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису внешнего угла, смежного с его тупым углом.

2. Постройте произвольный треугольник и его образ при симметрии относительно точки пересечения его медиан.

**III уровень сложности**

1. Постройте тупоугольный треугольник и его образ при симметрии относительно точки пересечения его высот.

2. С помощью циркуля и линейки постройте ось симметрии равнобедренной трапеции.

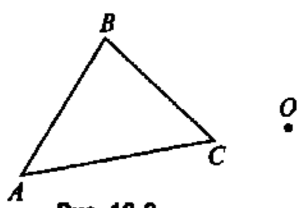


Рис. 13.8

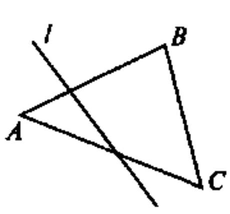


Рис. 13.9

### III. Определение темы урока

– Вспомните, что называют движением. Перечислите те свойства движений, которые вам уже известны. (*При движении сохраняется расстояние между точками.*)

– В какую фигуру при движении отображается отрезок? (*Отрезок при движении отображается на отрезок.*)

– Действительно, отрезок при движении отображается на отрезок, но истинность данного утверждения нужно доказать.

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

### IV. Работа по теме урока

1. Фронтальная работа с классом.

*Теорема:* При движении отрезок отображается на отрезок.

*Дано:* Отрезок $MN$, при движении точка $M$ отображается в точку $M_1$, точка $N$ – в точку $N_1$.

*Доказать:* Отрезок $MN$ отображается в отрезок $M_1N_1$.

*Доказательство:* Пусть $P$ – произвольная точка отрезка $MN$, которая при движении отображается в $P_1$. Так как $P \in MN$, то $MP + PN = MN$. При движении сохраняется расстояние между точками, поэтому $M_1N_1 = MN$, $M_1P_1 = MP$, $N_1P_1 = NP$, отсюда $M_1P_1 + N_1P_1 = MP + NP = MN = M_1N_1$, т. е. $M_1P_1 + N_1P_1 = M_1N_1$, а это значит, что $P_1 \in M_1N_1$. Итак, точки отрезка $MN$ отображаются в точки отрезка $M_1N_1$.

Докажем, что в каждую точку $P_1$ отрезка $M_1N_1$ отображается какая-нибудь точка $P$ отрезка $MN$. Так как $P_1 \in M_1N_1$, то $M_1N_1 = M_1P_1 + P_1N_1 = MP + PN = MN$, т. е. $P \in MN$. Теорема доказана.

2. Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы. Дать на обдумывание 2–3 мин, а затем заслушать варианты ответов.)

– В какую фигуру при движении отображается треугольник?

– Докажите справедливость своего утверждения.

*Ответ:* При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

(Доказательство проводится с использованием только что доказанной теоремы, в этом случае получим равенство треугольников по трем сторонам.)

– В какую фигуру отображается при движении: а) прямая; б) луч?

– В какую фигуру отображается при движении: а) произвольный четырехугольник; б) окружность?

– В какую фигуру отображается при движении угол?

### V. Закрепление изученного материала

1. Разобрать решение задачи № 1152 (б).

***Задача № 1152 (б)***

*Решение:*

При движении отрезок отображается на отрезок, треугольник – на равный ему треугольник, угол – на равный ему угол (рис. 13.10).

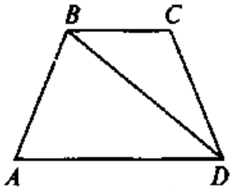


**Рис. 13.10**

Используя эти свойства движений, можно получить различные способы решений, а именно:

а) $\Delta ABD \to \Delta A_1B_1D_1$, $\Delta BCD \to \Delta B_1C_1D_1$, $\Rightarrow ABCD \to A_1B_1C_1D_1$, причем $ABCD = A_1B_1C_1D_1$, так как $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$, $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$.

б) $AB \to A_1B_1$, $AD \to A_1D_1$, $BC \to B_1C_1$, $CD \to C_1D_1$. $\angle A \to \angle A_1$, $\angle B \to B_1$, $\angle C \to \angle C_1$, $\angle D \to \angle D_1$, причем $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, тогда $ABCD \to A_1B_1C_1D_1$, причем $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1152 (в), 1158, дополнительные задачи.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** Докажите, что при движении смежные углы отображаются на смежные, а вертикальные – на вертикальные.

***Задача 2.*** Докажите, что при движении подобные треугольники отображаются на подобные треугольники.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. В какую фигуру отображается при движении: а) отрезок; б) прямая; в) луч?
2. В какую фигуру отображается при движении угол?
3. В какую фигуру отображается при движении: а) произвольный треугольник; б) четырехугольник; в) окружность?

### Домашнее задание

1. П. 118, 119, вопросы 7–13 (учебник, с. 297).
2. Решить задачи № 1150 (устно), 1153, 1152 (а), 1159 (учебник), № 88 (рабочая тетрадь).

# Урок 53. Решение задач по теме «Понятие движения. Осевая и центральная симметрии»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме «Понятие движения. Осевая и центральная симметрии»; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос по вопросам 7–13 учебника.
2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 1153, 1159. Два ученика записывают решение на доске во время проведения устного теоретического опроса.)

***Задача № 1153***

*Решение:* При движении сохраняются расстояния, т. е. $OA = O_1A_1$ (рис. 13.11), где $A$ – произвольная точка окружности, $O$ – центр окружности.

Каждая точка окружности отображается в точку на окружности, симметричную данной относительно прямой $l$.

***Задача № 1159*** (рис. 13.12)

*Ход построения:*

1) $CO_1 \perp l$, $CO_1 = C_1O_1$.
2) $BO_2 \perp l$, $BO_2 = B_1O_2$.
3) $AO_4 \perp l$, $AO_4 = A_1O_4$.
4) $DO_3 \perp l$, $DO_3 = D_1O_3$.
5) $A_1B_1C_1D_1$ – искомая фигура $F$, равная четырехугольнику $ABCD$.

### III. Решение задач

1. Работа в парах.

Решить задачу № 1157 с последующим обсуждением.

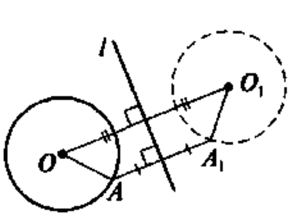



**Рис. 13.11**

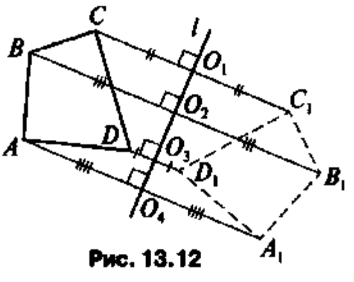



**Рис. 13.12**

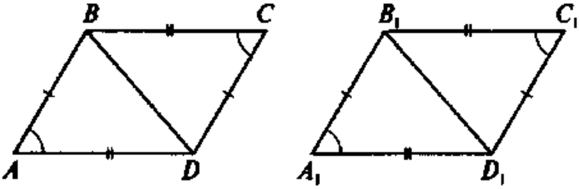



**Рис. 13.13**

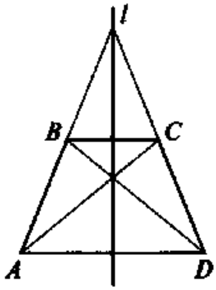



**Рис. 13.14**

***Задача № 1157***

*Дано:* $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограммы, $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$.

*Доказать:* $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

*Решение:* В параллелограмме противолежащие стороны и углы равны, следовательно, $\Delta ABD = \Delta CDB$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, $AD = CB$, $\angle A = \angle C$) (рис. 13.13);

$\Delta A_1B_1D_1 = \Delta C_1D_1B_1$ по двум сторонам и углу между ними ($A_1B_1 = C_1D_1$, $A_1D_1 = C_1B_1$, $\angle A_1 = \angle C_1$);

$\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$ по условию), следовательно, $\Delta CDB = \Delta C_1D_1B_1$.

$ABCD = \Delta ABD + \Delta CDB = \Delta A_1B_1D_1 + \Delta C_1D_1B_1 = A_1B_1C_1D_1$, что и требовалось доказать.

Вопросы для обсуждения.

– Проведем в параллелограммах $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ диагонали $BD$ и $B_1D_1$. Что вы можете сказать о получившихся треугольниках? Ответ обоснуйте.

– Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны.

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи с последующим обсуждением.

1) При помощи одной линейки постройте ось симметрии равнобедренной трапеции.

*Указания к решению* (см. рис. 13.14).

2) На рис. 13.15 изображены две окружности и прямая *l*. Найдите на этих окружностях точки, симметричные друг другу относительно прямой *l*.

*Указания к решению* (см. рис. 13.16).

**IV. Самостоятельная работа**

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

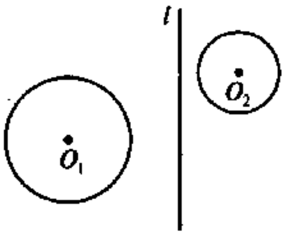



Рис. 13.15

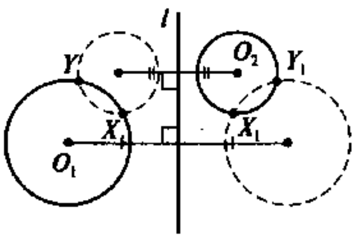



Рис. 13.16

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Постройте фигуру, симметричную данной:

а) относительно вершины $D$;

б) относительно диагонали $AC$.

2. Докажите, что при движении квадрат отображается на квадрат.

***Вариант 2***

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Постройте фигуру, симметричную данной:

а) относительно вершины $A$;

б) относительно диагонали $BD$.

2. Докажите, что при движении прямоугольник отображается на прямоугольник.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, симметричную данной:

а) относительно биссектрисы угла $A$;

б) относительно точки пересечения ее диагоналей.

2. Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

***Вариант 2***

1. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, симметричную данной:

а) относительно биссектрисы угла $B$;

б) относительно точки пересечения ее диагоналей.

2. Докажите, что при движении перпендикулярные прямые отображаются на перпендикулярные прямые.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

Дан треугольник $ABC$. Постройте фигуру, симметричную данной:

а) относительно центра вписанной в него окружности;

б) относительно биссектрисы одного из его внешних углов.

***Вариант 2***

Дан треугольник $ABC$. Постройте фигуру, симметричную данной:

а) относительно центра описанной около него окружности;

б) относительно биссектрисы одного из его внешних углов.

### V. Рефлексия учебной деятельности

1. Как построить фигуру, симметричную данной относительно данной точки?
2. Как построить фигуру, симметричную данной относительно прямой?
3. В какую фигуру отображается при движении: а) отрезок; б) прямая; в) луч; г) угол?
4. В какую фигуру отображаются при движении произвольный треугольник? четырехугольник? окружность?

### Домашнее задание

Решить задачи № 1155, 1156, 1160, 1161.

## Урок 54. Параллельный перенос

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятие параллельного переноса и доказать, что параллельный перенос есть движение; показать применение параллельного переноса при решении задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок, допущенных в самостоятельной работе

1. Провести общий анализ самостоятельной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь. Учащимся, которые успешно справились с заданиями самостоятельной работы, можно предложить решить задачи следующего уровня сложности или дополнительные задачи.)

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** *Дано:* Прямые $m$, $n$ и точка $O$ (рис. 13.17).

На этих прямых найдите точки, симметричные друг другу относительно точки $O$.

*Указания к решению* (см. рис. 13.18). Прямые $n$ и $n'$ симметричны относительно точки $O$.

***Задача 2.*** *Дано:* Отрезки $AB$ и $A_1B_1$ симметричны относительно точки $O$, точка $C_1$ симметрична точке $C$ относительно точки $O$, причем $C_1 \in A_1B_1$ (рис. 13.19).

Найдите точки $O$ и $C_1$.

*Указания к решению* (см. рис. 13.20).

## III. Определение темы урока

Работа в парах.

***Задание.*** Определите вид движения, изображенного на рисунках (см. п. 11 Приложения).

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## IV. Работа по теме урока

1. Ввести понятие параллельного переноса.

*Определение:* Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка $M$ отображается в такую точку $M_1$, что $\overline{MM_1} = \vec{a}$.

Осуществим параллельный перенос треугольника $ABC$ на вектор $\vec{a}$. Для этого отложим вектор $\vec{a}$ от точек $A$, $B$, $C$. Концы вектора обозначим $A_1$, $B_1$, $C_1$. $\Delta A_1B_1C_1$ – искомый (рис. 13.21).

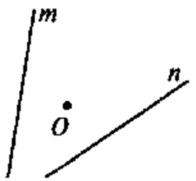


**Рис. 13.17**

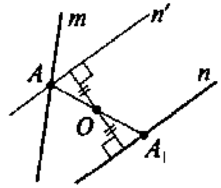


**Рис. 13.18**

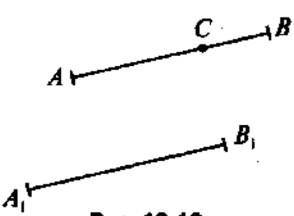


**Рис. 13.19**

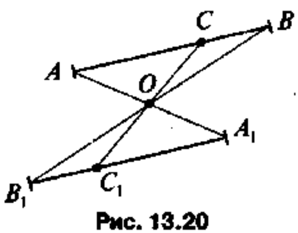


**Рис. 13.20**

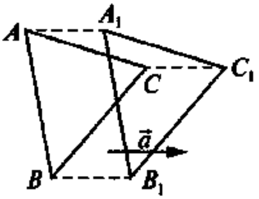



Рис. 13.21

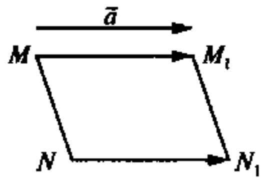



Рис. 13.22

2. Работа в группах.

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(2; 5)$, $B(-3; 7)$, $C(-1; -1)$, $D(-6; 1)$. Укажите координаты вершин четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, полученного путем параллельного переноса на вектор $\vec{a}\{-2; 3\}$ из четырехугольника $ABCD$.

(Формулы параллельного переноса учащимся не известны, но в хорошо подготовленном классе учащиеся быстро поймут, что координаты вершин четырехугольника $ABCD$ надо изменить на координаты вектора $\vec{a}$.)

*Ответ:* $A_1(0; 8)$, $B_1(-5; 10)$, $C_1(-3; 2)$, $D_1(-8; 4)$.

3. Фронтальная работа с классом.

– Как вы думаете, является ли параллельный перенос движением? (*Параллельный перенос есть движение.*)

*Теорема:* Параллельный перенос есть движение (т. е. отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние).

*Дано:* Параллельный перенос на $\vec{a}$, $M \to M_1$, $N \to N_1$.

*Доказать:* Параллельный перенос есть движение (сохраняется расстояние между точками $M$ и $N$, т. е. $MN = M_1N_1$).

*Доказательство:*

– Что можно сказать о четырехугольнике $MM_1N_1N$ (рис. 13.22)?

*Ответ:* $MM_1N_1N$ – параллелограмм, так как $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, значит, $|\overrightarrow{MM_1}| = |\overrightarrow{NN_1}|$ и $MM_1 \parallel NN_1$.

– Сохранилось ли расстояние между точками $M$ и $N$?

*Ответ:* Расстояние сохранилось, так как в параллелограмме $MM_1N_1N$ противоположные стороны $MN$ и $M_1N_1$ равны.

– Можно ли утверждать, что параллельный перенос есть движение?

*Ответ:* Да, так как он сохраняет расстояние.

– При доказательстве теоремы мы рассмотрели случай, когда точки $M$ и $N$ лежат на прямой, не параллельной вектору $\vec{a}$. Сохранится ли расстояние между точками $M$ и $N$ в случае, если они лежат на прямой, параллельной векто-

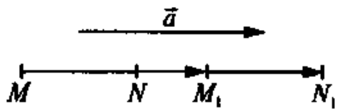


Рис. 13.23

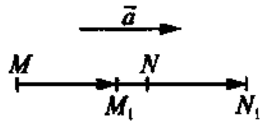


Рис. 13.24

ру $\vec{a}$? Рассмотрите этот случай самостоятельно, а затем мы обсудим предложенные доказательства.

Варианты доказательств.

1) Так как $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}, \overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, то $MM_1 = NN_1 = |\vec{a}|$ (рис. 13.23), тогда $MN = MM_1 - M_1N = NN_1 - M_1N = M_1N_1$, отсюда следует, что расстояние между точками $M$ и $N$ при параллельном переносе сохранилось.

2) $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}, \overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, поэтому $MM_1 = NN_1$ (рис. 13.24), тогда $MN = MM_1 + M_1N$; $M_1N_1 = M_1N + NN_1$, отсюда $MN = M_1N_1$.

Итак, теорема доказана.

## V. Закрепление изученного материала

1. Работа в парах.

Решить задачу № 89 (рабочая тетрадь).

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачу № 1164 (учебник), дополнительные задачи № 1, 2.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** В результате параллельного переноса вершины квадрата $ABCD$ переходят соответственно в вершины квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты точек $B_1$, $C_1$, $D_1$, если $A(1; -2)$, $A_1(5; 6)$, $B(4; 2)$, $C(0; 5)$, $D(-3; 1)$.

*Ответ:* $B_1(8; 10)$, $C_1(4; 13)$, $D_1(1; 9)$.

***Задача 2.*** Составьте уравнение образа окружности $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 10 = 0$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\{2; 4\}$.

*Ответ:* $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 15$.

***Критерии оценивания:***

- оценка «5» — правильно решены три задачи;
- оценка «4» — правильно решены две задачи;
- оценка «3» — правильно решена одна задача;
- оценка «2» — не ставится.

## VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какое отображение плоскости называется параллельным переносом?
2. Является ли параллельный перенос движением?

**Домашнее задание**

1. П. 120, вопросы 14, 15 (учебник, с. 297).

2. Решить задачи № 1162, 1163, 1165, дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

Постройте образ треугольника $ABC$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 13.25). Образ точки $M$ при этом же параллельном переносе постройте только при помощи циркуля.

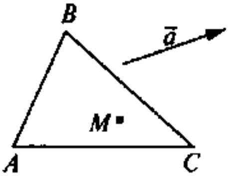


**Рис. 13.25**

*Указание.* $M_1$ – точка пересечения окружностей с центрами в точках $A_1$ и $C_1$ и радиусами, равными $AM$ и $CM$ соответственно.

# Урок 55. Поворот

***Основные дидактические цели урока:*** познакомить учащихся с поворотом; доказать, что поворот есть движение; научить учащихся осуществлять поворот фигуры.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 1165 и дополнительной задачи.)

2. Самостоятельное решение задач с последующим обсуждением.

**I уровень сложности**

В прямоугольном треугольнике $ABC$ $CK$ – биссектриса, точки $M$ и $N$ лежат на $CK$ так, что $M$ лежит между $C$ и $N$. Постройте образ треугольника $ABC$ при параллельном переносе на вектор $\overline{MN}$.

**II уровень сложности**

Найдите уравнение кривой, из которой получена парабола $y = x^2 - 3x + 4$ параллельным переносом на вектор $\vec{a}\{-1; -1\}$.

*Ответ:* $y = x^2 - 5x + 9$.

3. Индивидуальная работа по карточкам.

(Три–шесть учеников получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время проверки домашнего задания и самостоятельного решения задач.)

**I уровень сложности**

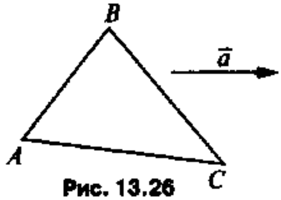


**Рис. 13.26**

1. Постройте образ треугольника $ABC$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 13.26).

2. Укажите координаты точек $A'$, $B'$, если известно, что они являются образами точек $A(2; 5)$, $B(-1; -3)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\{-3; 2\}$.

**II уровень сложности**

1. Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом $A$ и ее образ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, равный $\overrightarrow{AC}$.

2. В результате параллельного переноса прямоугольник $ABCD$ перешел в прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты вершин $B$, $C$, $D$, если $A(1; 1)$, $A_1(2; 3)$, $B_1(4; 1)$, $C_1(9; 6)$, $D_1(7; 8)$.

**III уровень сложности**

1. Постройте треугольник $ABC$ и его образ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CM}$, где $M$ – точка пересечения медиан данного треугольника.

2. Составьте уравнение прообраза окружности $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\{1; 3\}$.

**III. Определение темы урока**

Работа в парах.

***Задание.*** Определите вид движения, изображенного на рисунке (см. п. 11 Приложения).

**IV. Работа по теме урока**

1. Ввести понятие поворота.

*Определение:* Поворотом плоскости вокруг точки $O$ на угол $\alpha$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка $M$ отображается в такую точку $M_1$, что $OM = OM_1$, $\angle MOM_1 = \alpha$.

$\alpha$ – угол поворота; $O$ – центр поворота (рис. 13.27).

Построить образ отрезка $AB$ при повороте вокруг точки $O$ на 60° против часовой стрелки (рис. 13.28).

***Ход построения:***

1) Построить $\angle AOA_1 = 60°$, $OA = OA_1$.

2) Построить $\angle BOB_1 = 60°$, $OB = OB_1$.

3) $A_1B_1$ – образ отрезка $AB$ при повороте вокруг точки $O$ на 60° против часовой стрелки.

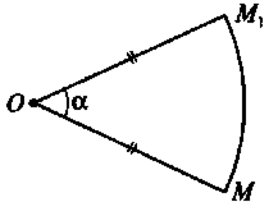



Рис. 13.27

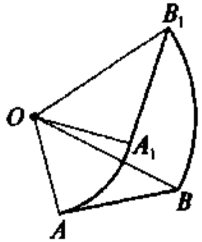



Рис. 13.28

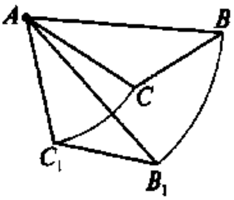



Рис. 13.29

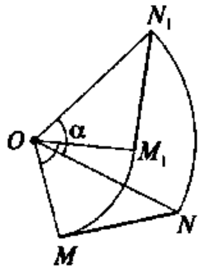



Рис. 13.30

2. Работа в парах.

Построить образ $\Delta ABC$ при повороте вокруг точки $A$ на 45° по часовой стрелке (рис. 13.29).

*Ход построения:*

1) Построить $\angle BAB_1 = 45°$, $AB = AB_1$.

2) Построить $\angle CAC_1 = 45°$, $AC = AC_1$.

3) Построить $\Delta AB_1C_1$.

3. Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы. Дать на обдумывание 2–3 мин, а затем заслушать варианты ответов.)

– Как вы думаете, является ли поворот движением? Ответ обоснуйте.

Поворот есть движение. Докажем, что поворот сохраняет расстояния (рис. 13.30). Возьмем точки $M$ и $N$ и осуществим поворот данных точек на угол α. Образы точек $M$ и $N$ назовем $M_1$ и $N_1$ соответственно. Рассмотрим $\Delta OMN$ и $\Delta OM_1N_1$. У них по определению поворота $OM = OM_1$, $ON = ON_1$, $\angle MON = \angle MOM_1 - \angle NOM_1 = \alpha - \angle NOM_1$, $\angle M_1ON_1 = \angle NON_1 - \angle NOM_1 = \alpha - \angle NOM_1$, следовательно, $\Delta OMN = \Delta OM_1N_1$ по двум сторонам и углу между ними, значит, $MN = M_1N_1$, т. е. при повороте сохраняются расстояния, а это значит, поворот есть движение.

### V. Закрепление изученного материала

1. Разобрать решение задачи № 90 (рабочая тетрадь).

2. Самостоятельное решение задач.

*I уровень сложности:* задачи № 1166 (а, в), № 92 (рабочая тетрадь).

*II уровень сложности:* задачи № 1166 (а), 1169, дополнительные задачи № 1, 2.

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** Постройте образ угла *ABC* при повороте вокруг точки *O* на 120° против часовой стрелки (рис. 13.31).

***Задача 2.*** Докажите, что при повороте правильного шестиугольника на 120° вокруг своего центра он отображается сам на себя.

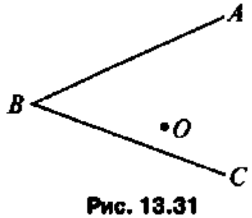


**Рис. 13.31**

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какое отображение плоскости называется поворотом?
2. Является ли поворот движением?

### Домашнее задание

1. П. 121, вопросы 16, 17 (учебник, с. 297).
2. Решить задачи. I уровень сложности: № 1166 (б), 1167 (учебник), № 91 (рабочая тетрадь); II уровень сложности: № 1167, 1168, дополнительную задачу № 2.

## Урок 56. Решение задач по теме «Параллельный перенос. Поворот»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме «Параллельный перенос. Поворот»; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Индивидуальная работа у доски.

(Два ученика готовят ответы на вопросы во время работы в парах.)

– Какое отображение плоскости называется параллельным переносом? Приведите примеры.

– Какое отображение плоскости называется поворотом? Приведите примеры.

2. Письменный теоретический опрос.

(Два–четыре ученика самостоятельно доказывают, что: а) параллельный перенос есть движение; б) поворот есть движение. По окончании работы тетради сдают на проверку учителю.)

**III. Работа в парах**

Решить задачи с последующим обсуждением.

**I уровень сложности**

1. Постройте тупоугольный треугольник $ABC$ и его образ при параллельном переносе на вектор $\overline{AM}$, где $AM$ – высота треугольника ($\angle B$ – тупой).

2. Постройте ромб $ABCD$ и его образ при повороте вокруг точки $A$ на 100° против часовой стрелки.

**II уровень сложности**

1. При параллельном переносе прямая $2x - y + 2 = 0$ переходит в прямую $4x - 2y - 1 = 0$, а прямая $x + y + 1 = 0$ – в прямую $x + y - 3 = 0$. Найдите координаты точки, в которую при этом параллельном переносе переходит точка $A(-1; 1)$.

2. На двух данных окружностях найдите пару точек, таких, что поворот вокруг данной точки $O$ на 60° отображает одну точку этой пары на другую (рис. 13.32).

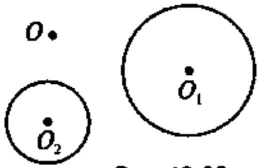


**Рис. 13.32**

*Ответы и указания к задачам II уровня сложности:*

1. *Ответ:* $\left(\frac{7}{6}; \frac{17}{6}\right)$.

*Указание.* Прямые $2x - y + 2 = 0$ и $x + y + 1 = 0$ пересекаются в точке $A_1(-1; 0)$. Прямые $4x - 2y - 1 = 0$ и $x + y - 3 = 0$ пересекаются в точке $A_2\left(\frac{7}{6}; \frac{11}{6}\right)$. Точка $A_1$ при параллельном переносе отображается в точку $A_2$, значит, $\overline{A_1A_2}$ – вектор параллельного переноса $\overline{A_1A_2}\left\{\frac{13}{6}; \frac{11}{6}\right\}$. Тогда точка $A(-1; 1)$ при данном параллельном переносе отображается в точку $B\left(\frac{7}{6}; \frac{17}{6}\right)$.

2. *Указание к решению.* Осуществите поворот окружности с центром в точке $O_2$ относительно точки $O$ на 60° против часовой стрелки.

## IV. Самостоятельная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Постройте его образ при параллельном переносе на вектор $\overline{AO}$, где $O$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

2. Постройте ромб и его образ при повороте вокруг одной из его вершин на 60° против часовой стрелки.

***Вариант 2***

1. Дана трапеция $ABCD$. Постройте ее образ при параллельном переносе на вектор $\overline{BO}$, где $O$ – точка пересечения диагоналей трапеции.

2. Постройте прямоугольник и его образ при повороте вокруг одной из его вершин на 45° по часовой стрелке.

**II уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Дана трапеция $ABCD$. Известно, что при некотором параллельном переносе точка $A$ отображается в точку $C$. Постройте фигуру, в которую отображается $\Delta ABD$ при данном параллельном переносе.

2. Дан равнобедренный треугольник $ABC$ с углом $B$, равным 120°. При некотором повороте точка $A$ отображается на точку $B$, а точка $B$ – на точку $C$. Постройте центр поворота.

***Вариант 2***

1. Дан тупоугольный треугольник $ABC$ с тупым углом $B$. Постройте фигуру, в которую отображается данный треугольник при параллельном переносе на вектор $\overline{BH}$, где $H$ – точка пересечения высот $\Delta ABC$.

2. Дан равнобедренный треугольник $ABC$ с прямым углом $B$. При некотором повороте точка $A$ отображается на точку $B$, а точка $B$ – на точку $C$. Постройте центр поворота.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Даны угол $ABC$ и точка $M$ внутри него. Найдите на сторонах угла такие точки $D$ и $E$, чтобы при параллельном переносе точка $B$ отображалась на точку $D$, а точка $E$ – на точку $M$.

2. Даны прямые $a$, $b$ и точка $O$ (рис. 13.33). На прямых найдите такие точки, что одна из них переходит в другую при повороте на 60° вокруг точки $O$.

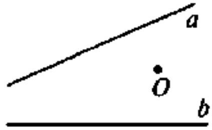



Рис. 13.33

*Вариант 2*

1. Даны угол $ABC$ и точка $K$ вне его. Найдите на сторонах угла такие точки $M$ и $N$, чтобы при параллельном переносе точка $B$ отображалась на точку $M$, а точка $K$ – на точку $N$.

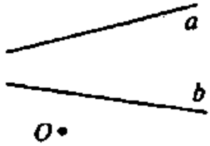


Рис. 13.34

2. Даны прямые $a$, $b$ и точка $O$ (рис. 13.34). На прямых найдите такие точки, что одна из них переходит в другую при повороте на 45° вокруг точки $O$.

**V. Рефлексия учебной деятельности**

1. Как построить образ фигуры при параллельном переносе?
2. Как построить образ фигуры при повороте?
3. Обсудить решение задач, с которыми не справилось большинство обучаюшихся.

**Домашнее задание**

1. Вопросы 1–17 (учебник, с. 297).
2. Решить задачи № 1170, 1171, 1172, дополнительную задачу.

*Дополнительная задача*

Дана трапеция $ABCD$. Известно, что при параллельном переносе прямая $AD$ отображается на прямую $BC$, а прямая $BD$ отображается на себя. Постройте точку, в которую переходит точка $A$ при этом параллельном переносе.

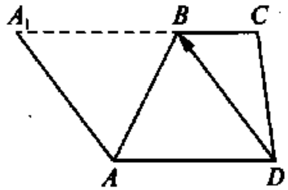


Рис. 13.35

*Решение:* $\overrightarrow{DB}$ – вектор параллельного переноса. Точка $A$ отображается в точку $A'$. ($\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DB}$) (рис. 13.35).

# Урок 57. Решение задач по теме «Движения»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме «Движения»; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Индивидуальная работа у доски.

(Четыре ученика готовят ответы на вопросы во время проведения теоретического опроса.)

– Какое отображение плоскости на себя называют:

а) осевой симметрией;

б) центральной симметрией;

в) параллельным переносом;

г) поворотом?

Приведите примеры.

2. Фронтальный теоретический опрос.

– Что называют движением плоскости?

– Перечислите основные свойства движений.

– Верно ли утверждение, что при движении любая фигура отображается на равную ей фигуру?

– Перечислите известные вам преобразования плоскости, являющиеся движениями.

– Каков алгоритм доказательства теорем, утверждающих, что данное преобразование плоскости есть движение?

– Определите, с помощью каких преобразований плоскости можно перевести (рис. 13.36):

а) фигуру $F_1$ в фигуру $F_2$;

б) фигуру $F_1$ в фигуру $F_3$;

в) фигуру $F_1$ в фигуру $F_4$;

г) фигуру $F_2$ в фигуру $F_4$;

д) фигуру $F_4$ в фигуру $F_3$?

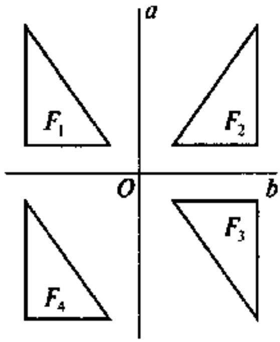


Рис. 13.36

3. Самостоятельное решение задач с последующим обсуждением.

**I уровень сложности**

1) В результате параллельного переноса точка $A(-1; 3)$ переходит в точку $A'(2; 4)$, а точка $B(1; -3)$ – в точку $B'$. Найдите координаты точки $B'$.

2) При осевой симметрии относительно координатной оси $Oy$ точка $A$ переходит в точку $A_1$, а точка $B$ – в точку $B_1$. Найдите координаты точек $A_1$ и $B$, если $A(-2; 5)$, $B_1(-3; -8)$.

3) При центральной симметрии относительно начала координат четырехугольник $ABCD$ переходит в четырехугольник $A_1B_1C_1D$. Найдите координаты точек $A$, $B$, $C$, $D$, если $A_1(-6; -1)$, $B_1(-5; -8)$, $C_1(-1; -6)$, $D(0; 0)$.

4) В результате поворота вокруг начала координат точка $A(4; 0)$ перешла в точку $A'(0; 4)$. Найдите точку, в которую перейдет точка $A$ в результате поворота на 30°, 45°, 120° вокруг того же центра и в том же направлении.

5) Какое наименьшее число вершин может иметь многоугольник, у которого есть две оси симметрии, пересекающиеся под углом 30°?

**II уровень сложности**

1) На плоскости даны два равных и непараллельных отрезка $AB$ и $A'B'$. Постройте центр поворота, при котором точка $A$ переходит в точку $A'$, точка $B$ – в точку $B'$.

2) На плоскости даны два равных отрезка $AB$ и $CD$. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $P$. Пусть окружности, описанные около треугольников $ABP$ и $CDP$, пересекаются в точке $O$, отличной от $P$. Докажите, что в результате поворота вокруг $O$ на угол $AOC$ точка $A$ переходит в точку $C$, а точка $B$ – в точку $D$.

### III. Проверка домашнего задания

(Учитель проверяет решение задач № 1171, 1172. Рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

***Задача № 1171***

а) Даны точка $O$ и прямая $a$ (рис. 13.37). Постройте прямую $a_1$, являющуюся образом прямой $a$ при повороте вокруг точки $O$ на угол 45° по часовой стрелке.

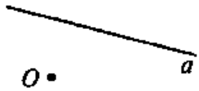



**Рис. 13.37**

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

б) Даны точка $O$ и прямая $a$ (рис. 13.38). Постройте прямую $a_1$, являющуюся образом прямой $a$ при повороте вокруг точки $O$ на угол 45° по часовой стрелке.

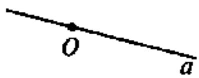



**Рис. 13.38**

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

***Задача № 1172***

Пусть $C$ – произвольная точка отрезка $AB$. Предположим, что при данном движении она переходит в какую-то точку $C_1$, не лежащую на отрезке $AB$. Точка $C_1$ не лежит на отрезке $AB$, следовательно, $ABC_1$ – треугольник, что невозможно, так как при движении отрезок переходит в отрезок. Отсюда следует, что любая точка прямой $AB$ отображается на себя.

### IV. Решение задач

1. Работа в парах.

Решить задачу № 93 (рабочая тетрадь) с последующим обсуждением.

2. Фронтальная работа с классом.

Разобрать решение задачи № 1181 (учебник).

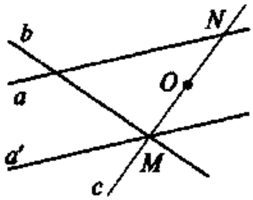



Рис. 13.39

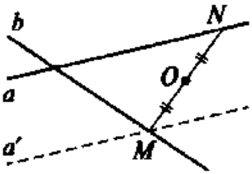



Рис. 13.40

***Задача № 1181*** (рис. 13.39)

*Ход построения:*

а) Построить прямую $a'$, симметричную прямой $a$ относительно точки $O$.

б) Построить прямую $c$, проходящую через точку $O$ и точку пересечения прямых $a'$ и $b$ – точку $M$.

Наводящие вопросы.

– Предположим, прямая $MN$ пересекает прямые $a$ и $b$, а точка $O$ делит отрезок $MN$ пополам (рис. 13.40). Что вы можете сказать о точках $M$ и $N$? (*Они симметричны относительно точки O.*)

– Укажите на плоскости геометрическое место точек, симметричных каждой точке прямой $a$. (*Они лежат на прямой a′, симметричной прямой a относительно точки O.*)

3. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1174 (а), 1173, 1179, дополнительные задачи № 1—3.

***Задача № 1174 (а)***

*Решение:* Так как $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольники (рис. 13.41), то $AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$, $AD = BC = A_1D_1 = B_1C_1$, тогда $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$, $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$ по двум катетам.

$ABCD = \Delta ABD + \Delta BCD = \Delta A_1B_1D_1 + \Delta B_1C_1D_1 = A_1B_1C_1D_1$, что и требовалось доказать.

***Задача № 1173***

Возьмем некоторую точку $D$ на плоскости. Допустим, что $D$ не переходит в $D_1$, тогда $\Delta ABD \neq \Delta ABD_1$. Но при движении тре-

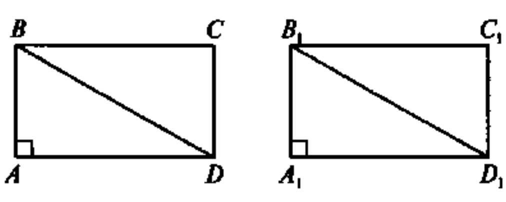



Рис. 13.41

угольник отображается на равный ему треугольник. Получили противоречие, следовательно, любая точка данной плоскости отображается на себя.

***Задача № 1179***

*Решение:* Осуществим параллельный перенос $\Delta BSA$ на вектор $\overline{BC}$, его образом будет $\Delta CS_1D$ (рис. 13.42).

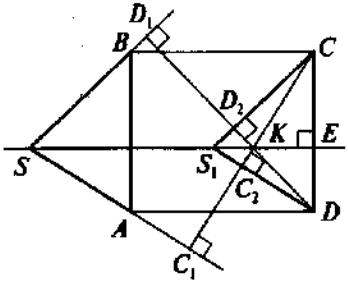



**Рис. 13.42**

Так как $CC_1 \perp SA$, то $CC_1 \perp S_1D$. Так как $SA \parallel S_1D$ по свойству параллельного переноса, то $CC_2$ – высота $\Delta CS_1D$.

Так как $DD_1 \perp SB$, то $DD_1 \perp S_1C$. Так как $SB \parallel S_1C$ по свойству параллельного переноса, то $DD_2$ – высота $\Delta CS_1D$.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, $K$ – точка пересечения высот, $S_1E$ – высота $\Delta CS_1D$, т. е. $S_1E \perp CD$.

Так как $AB \parallel CD$ как противолежащие стороны прямоугольника, то $SK \perp AB$.

Наводящие вопросы и указания.

– Выполните параллельный перенос $\Delta BSA$ на вектор $\overline{BC}$.
– Что вы можете сказать о $\Delta CS_1D$? $S_1D$ и $S_1C$ треугольника $CS_1D$ и прямых $S_1K$ и $CD$?
– Каково взаимное расположение прямых $SK$ и $AB$?

***Дополнительные задачи***

***Задача 1.*** На плоскости даны две прямые, пересекающиеся под углом 45°. В результате двух последовательных симметрий относительно этих прямых точка $A$ переходит в точку $A'$, а точка $B$ – в точку $B'$. Найдите угол между прямыми $AB$ и $A'B'$.

*Ответ:* 90°.

***Задача 2.*** Сколько существует движений, переводящих квадрат сам в себя?

*Ответ:* 8 движений.

***Задача 3.*** В результате параллельного переноса точка $A$ переходит в точку $A'$, а прямая $l$ – в прямую $l'$. Найдите уравнение прямой, если:

а) $A(-2; 5)$, $A'(3; -4)$; уравнение прямой $l$ есть $2x - 3y = 1$;
б) $A(4; 7)$, $A'(-3; 13)$; уравнение прямой $l$ есть $3x + 4y = 5$.

*Ответ:* а) $2x - 3y = 38$; б) $3x + 4y = 8$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «4» – правильно решены две-три задачи;

- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – все задачи решены неправильно.

**V. Рефлексия учебной деятельности**

1. Какое отображение плоскости на себя называют:
   а) осевой симметрией;
   б) центральной симметрией;
   в) параллельным переносом;
   г) поворотом?
2. Как построить образ фигуры при:
   а) осевой симметрии;
   б) центральной симметрии;
   в) параллельном переносе;
   г) повороте?

**Домашнее задание**

Решить задачи № 1172, 1174 (б), 1177, 1183, дополнительную задачу.

***Дополнительная задача***

Найдите вектор параллельного переноса, если прямая, задаваемая уравнением $y = 3x - 2$, переходит в прямую $y = 3x + 4$, а прямая $3x + 2y = 2$ переходит в прямую $6x + 4y = 3$.

*Ответ:* $\vec{a}\{-\frac{25}{18}; \frac{11}{6}\}$.

## Урок 58. Подготовка к контрольной работе по теме «Движения»

***Основные дидактические цели урока:*** закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки, подготовить учащихся к контрольной работе; совершенствовать навыки решения задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности**

**II. Актуализация знаний учащихся**

Решить задачи (устно).

1. Какой треугольник имеет:
   а) одну ось симметрии;
   б) три оси симметрии?
2. Назовите четырехугольники, обладающие:
   а) осевой симметрией;
   б) центральной симметрией.

3. Докажите, что биссектриса угла является его осью симметрии.

4. При симметрии относительно прямой $a$ точки $A$ и $B$ перешли соответственно в точки $A'$ и $B'$. Где по отношению к прямой $a$ лежит точка пересечения прямых $AB$ и $A'B'$ при условии, что прямые $AB$ и $a$ не параллельны?

5. На плоскости отмечена 3001 точка. При симметрии относительно некоторой прямой каждая из этих точек переходит в какую-то из отмеченных точек. Докажите, что прямая $a$ проходит хотя бы через одну из отмеченных точек.

6. В результате поворота на 90° против часовой стрелки около начала координат треугольник $ABC$ отобразился на треугольник $A_1B_1C_1$. Найдите координаты точек $A_1$, $B$, $C$, если известно, что $A(3; 2)$, $B_1(-5; 0)$, $C_1(-6; 5)$.

7. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}\{-2; 5\}$ график функции $y = |x|$ перешел в некоторую линию. Найдите уравнение полученной линии.

*Ответы и указания к задачам:*

1. а) равнобедренный; б) равносторонний.

2. а) квадрат, ромб, прямоугольник, равнобедренная трапеция; б) параллелограмм, квадрат, ромб, прямоугольник.

3. *Указание к решению.* Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

4. На прямой $a$.

5. *Указание к решению.* Если бы ни одна из отмеченных точек не лежала на прямой $a$, то количество точек было бы числом четным.

6. $A_1(-2; 3)$, $B(0; 5)$, $C(5; 6)$.

7. $y = |x + 2| + 5$.

**III. Решение задач**

Работа в группах.

(Учитель делит класс на группы по 3—4 человека так, чтобы в каждой группе были учащиеся с примерно одинаковым уровнем подготовленности. Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает консультативную помощь.)

**I уровень сложности**

1. Начертите трапецию $ABCD$ так, чтобы все ее стороны были разными по длине. Постройте ее образ при:

а) симметрии относительно прямой $BC$;

б) симметрии относительно точки $A$;

в) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{DO}$, где $O$ – точка пересечения диагоналей;

г) повороте вокруг точки $D$ на 90° по часовой стрелке.

2. *Дано:* $OA = OC$, $AB = CD$ (рис. 13.43). Используя осевую симметрию, докажите, что $OK$ – биссектриса угла $BOD$.

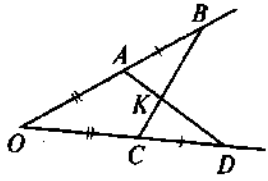


**Рис. 13.43**

**II уровень сложности**

1. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте его образ:

а) при симметрии относительно прямой $AK$, где $K$ – середина стороны $CD$;

б) симметрии относительно точки $O$, где $O$ – центр вписанной в $\Delta ABC$ окружности;

в) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AO}$, где $O$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма;

г) повороте вокруг вершины $D$ на 120° против часовой стрелки.

2. Составьте уравнение образа окружности $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 76 = 0$ при:

а) осевой симметрии относительно оси $Ox$;

б) центральной симметрии относительно начала координат;

в) параллельном переносе на вектор $\bar{a}\{3; -4\}$;

г) повороте на 270° по часовой стрелке относительно начала координат.

**III уровень сложности**

1. Начертите произвольный четырехугольник $ABCD$. Постройте его образ при:

а) симметрии относительно прямой $CK$, являющейся биссектрисой угла $BCD$;

б) симметрии относительно точки $O$, являющейся центром описанной около треугольника $ABD$ окружности;

в) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$, где $M$ – точка пересечения медиан треугольника $ABC$, $N$ – точка пересечения биссектрис треугольника $ACD$;

г) повороте вокруг точки пересечения диагоналей $ABCD$ на 105° против часовой стрелки.

2. При параллельном переносе прямая $x + y - 1 = 0$ перешла в прямую $2x + 2y - 1 = 0$, а прямая $x - 2y + 1 = 0$ – в прямую $x - 2y + 4 = 0$. Найдите вектор параллельного переноса и координаты вершин образа треугольника $ABC$ при этом же параллельном переносе, если известно, что $A(4; 5)$, $B(7; 0)$, $C(-1; -4)$.

### IV. Рефлексия учебной деятельности

1. Перечислите основные виды движений.
2. Какими свойствами обладают преобразования плоскости, являющиеся движениями?
3. Как построить образ фигуры при:
   а) осевой симметрии;
   б) центральной симметрии;
   в) параллельном переносе;
   г) повороте?

### Домашнее задание

Решить задачи следующего уровня сложности.

Учащимся, решившим на уроке задачи III уровня сложности, решить задачи № 1–3.

*Задача 1.* При параллельном переносе точка $A(-4; -7)$ отобразилась в точку $A_1(-2; 0)$. Найдите уравнение кривой, полученной из параболы $y = x^2 - 3x + 5$ с помощью этого же параллельного переноса.

*Задача 2.* В данный сектор с помощью циркуля и линейки впишите квадрат.

*Задача 3.* В результате некоторого движения точка $A(-3; 1)$ перешла в точку $A_1(3; -4)$, а точка $B(0; 5)$ – в точку $B_1(3; 1)$. В какую точку при таком движении может перейти точка $M(-1; -1)$?

## Урок 59. Контрольная работа № 5 по теме «Движения»

***Основная дидактическая цель урока:*** проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Движения».

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Контрольная работа

(Рекомендуется дифференцированная работа.)

**I уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите ромб $ABCD$. Постройте образ этого ромба при:
   а) симметрии относительно точки $C$;
   б) симметрии относительно прямой $AB$;
   в) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AC}$;
   г) повороте вокруг точки $D$ на 60° по часовой стрелке.

2. Докажите, что прямая, содержащая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через ее центр.

3*. Начертите два параллельных отрезка, длины которых равны. Начертите точку, являющуюся центром симметрии, при котором один отрезок отображается на другой.

*Вариант 2*

1. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте образ этого параллелограмма при:
   а) симметрии относительно точки $D$;
   б) симметрии относительно прямой $CD$;
   в) параллельном переносе на вектор $\overline{BD}$;
   г) повороте вокруг точки $A$ на 45° против часовой стрелки.

2. Докажите, что прямая, содержащая середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через точку пересечения его диагоналей.

3*. Начертите два параллельных отрезка, длины которых равны. Постройте центр поворота, при котором один отрезок отображается на другой.

**II уровень сложности**

*Вариант 1*

1. Начертите треугольник $ABC$. Постройте его образ при:
   а) симметрии относительно его высоты, выходящей из вершины $A$;
   б) симметрии относительно точки $D$, являющейся серединой стороны $AB$;
   в) параллельном переносе на вектор $\overline{AM}$, где $M$ – точка пересечения медиан треугольника;
   г) повороте вокруг вершины $C$ на 45° против часовой стрелки.

2. Составьте уравнение образа окружности $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ при повороте на 90° против часовой стрелки относительно начала координат.

3*. Начертите два непараллельных отрезка $AB$ и $CD$, длины которых равны. Постройте центр поворота, отображающего отрезок $AB$ на $CD$ ($A \to C$, $B \to D$).

*Вариант 2*

1. Начертите треугольник $ABC$. Постройте его образ при:
   а) симметрии относительно биссектрисы его угла $B$;
   б) симметрии относительно точки $H$, если $AH$ – высота треугольника;
   в) параллельном переносе на вектор $\overline{AO}$, где $O$ – центр описанной около треугольника окружности;
   г) повороте вокруг вершины $B$ на 60° по часовой стрелке.

2. Составьте уравнение образа окружности $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 20 = 0$ при повороте на 180° по часовой стрелке относительно начала координат.

3*. Дан $\Delta ABC$ и параллельные прямые $a$ и $b$. Постройте треугольник, равный данному, так, чтобы основание его принадлежало прямой $a$, а вершина – прямой $b$.

**III уровень сложности**

***Вариант 1***

1. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте его образ при:
   а) симметрии относительно прямой, проходящей через вершину $D$ параллельно диагонали $AC$;
   б) симметрии относительно точки, являющейся серединой $AD$;
   в) параллельном переносе на вектор $\overline{AE}$, где $E \in AC$ и $AE : EC = 3 : 1$;
   г) повороте вокруг точки пересечения диагоналей на 150° против часовой стрелки.

2. Найдите уравнение кривой, полученной параллельным переносом на вектор $\vec{a}\{1; 1\}$ из параболы $y = x^2 - 3x + 1$.

3*. Внутри угла отмечена точка $M$, не лежащая на его биссектрисе. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку $M$.

***Вариант 2***

1. Начертите ромб $ABCD$. Постройте его образ при:
   а) симметрии относительно прямой, проходящей через вершину $C$ параллельно диагонали $AC$;
   б) симметрии относительно точки, являющейся серединой стороны $BC$;
   в) параллельном переносе на вектор $\overline{BK}$, где $K \in BD$ и $BK : KD = 1 : 3$;
   г) повороте вокруг точки пересечения диагоналей на 120° по часовой стрелке.

2. Найдите уравнение кривой, из которой получена парабола $y = x^2 - 2x + 5$ параллельным переносом на вектор $\vec{a}\{-1; 1\}$.

3*. Даны угол и точка внутри него. С помощью циркуля и линейки постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат на сторонах угла, а одна из сторон проходит через данную точку.

## III. Рефлексия учебной деятельности

В конце урока учитель раздает на каждую парту ответы к задачам контрольной работы.

## Домашнее задание

Решить контрольную работу следующего уровня сложности.

# Глава XIV
# НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТЕРЕОМЕТРИИ

***Формируемые УУД: предметные:*** ввести понятия стереометрии, геометрических тел и поверхностей, сечения тела; познакомить учащихся с геометрическими телами и поверхностями вращения; ввести понятие объема геометрического тела и рассмотреть свойства объемов; научить учащихся вычислять площади поверхностей и объемы геометрических тел; выработать навыки построения изображений геометрических тел и поверхностей вращения; научить учащихся решать простейшие стереометрические задачи; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал; извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

## Урок 60. Призма

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия многогранника, выпуклого и невыпуклого многогранника, граней, ребер, вершин, диагоналей многогранника, прямой и наклонной призм, параллелепипеда и их элементов; научить учащихся использовать изученный материал при решении простейших задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Анализ ошибок, допущенных в контрольной работе

1. Провести общий анализ контрольной работы.

2. Решить задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

3. Работа над ошибками.

(На интерактивной доске записаны готовые ответы и указания к задачам контрольной работы. Ученики находят и исправляют свои ошибки. Учитель по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

### III. Определение темы урока

Работа в группах.

*Задание.* Разделите на группы геометрические фигуры: куб, параллелограмм, квадрат, пирамида, круг, шар, трапеция, шестиугольник, параллелограмм, цилиндр, овал, ромб, конус. Дайте название группам.

(Ученики должны разделить все фигуры на плоские и пространственные геометрические фигуры и тела.)

- Как называется часть геометрии, которая изучает свойства плоских геометрических фигур? (*Планиметрия.*)
- Окружающие нас предметы в большинстве не являются плоскими. Любой реальный предмет занимает какую-то часть пространства. Как называется раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве? (*Стереометрия.*)

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

### IV. Работа по теме урока

(В ходе изложения нового материала учитель записывает краткий план-конспект на доске, ученики – в тетрадях. Рисунки подготовить на доске заранее.)

План-конспект.

Слово «стереометрия» происходит от древнегреческих слов «stereos» – объемный, пространственный и «metria» – измерение. Простейшие фигуры стереометрии – точки, прямые и плоскости.

Из этих фигур образованы геометрические тела и их поверхности. Если поверхности геометрических тел составлены из многоугольников, то такие тела называются многогранниками. Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его гранями. При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости. Стороны граней называются ребрами, а концы ребер – вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника. Многогранники бывают выпуклыми и невыпуклыми. Выпуклый многогранник характеризуется тем, что он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

***Задание.*** На рис. 14.1 и 14.2 изображены многогранники.

– Какой из многогранников является выпуклым, какой невыпуклым? Почему?
– Многогранник, изображенный на рис. 14.1, называется октаэдром. Сколько граней у данного октаэдра? Перечислите их.
– Укажите все ребра и вершины октаэдра.

***Вывод.*** У октаэдра восемь граней, двенадцать ребер и шесть вершин. Все грани октаэдра – равные правильные треугольники, все ребра равны.

– Приведите примеры известных вам многогранников.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется секущей плоскостью этого тела. Фигура, которая образуется при пересечении тела с секущей плоскостью, называется сечением тела. На рис. 336 учебника изображен заштрихованный круг – это сечение шара плоскостью $\alpha$.

Плоскости могут быть параллельными, перпендикулярными, пересекающимися, совпадающими. Две плоскости называются

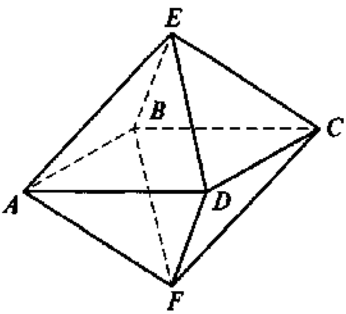



**Рис. 14.1**

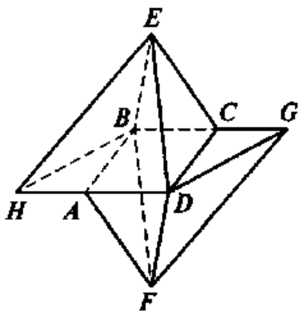



**Рис. 14.2**

параллельными, если они не имеют общих точек. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой в этой плоскости.

В 9 классе мы познакомимся с основными многогранниками – призмами и пирамидами.

Многогранник, составленный из двух равных $n$-угольников, лежащих в параллельных плоскостях, и $n$-параллелограммов, которые образовались при соединении вершин $n$-угольников отрезками параллельных прямых, – называется $n$-угольной призмой. Равные $n$-угольники называются основаниями призмы. Стороны многоугольников называются ребрами оснований. Параллелограммы называются боковыми гранями призмы. Параллельные отрезки называются боковыми ребрами призмы. Призмы бывают прямыми и наклонными.

Если основания прямой призмы – правильные многоугольники, то такая призма называется правильной. У прямых призм все боковые грани – прямоугольники. Боковые ребра прямой призмы перпендикулярны к плоскостям ее оснований. Если из любой точки одного основания провести перпендикуляр к другому основанию призмы, то мы получим высоту призмы. Четырехугольная призма, основания которой – параллелограммы, называется параллелепипедом. Если основания прямого параллелепипеда – прямоугольники, то этот параллелепипед прямоугольный.

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает задание. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении участвует весь класс.)

Выполните задания, используя рис. 14.3–14.6.

***Задание 1.*** Покажите основания, боковые грани, ребра, вершины призм.

***Задание 2.*** Какие призмы являются прямыми, какие – наклонными? Ответ обоснуйте.

***Задание 3.*** Какие призмы являются правильными? Ответ обоснуйте.

***Задание 4.*** Покажите призмы, которые являются параллелепипедами.

***Задание 5.*** Перечислите призмы, у которых боковые грани являются прямоугольниками, параллелограммами, квадратами.

***Задание 6.*** Перечислите призмы, у которых боковые ребра перпендикулярны к плоскостям ее оснований.

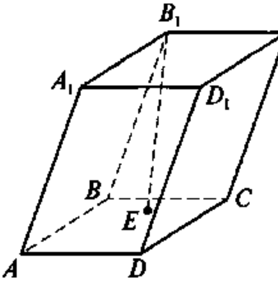



**Рис. 14.3**

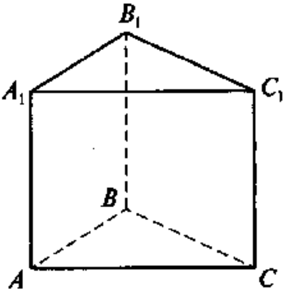



**Рис. 14.4**

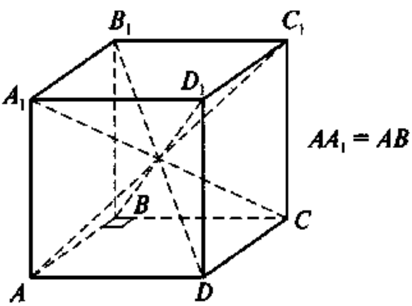



**Рис. 14.5**

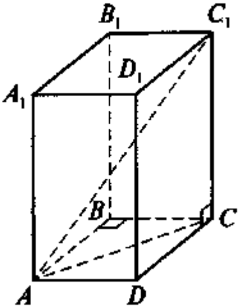



**Рис. 14.6**

На рис. 14.5 изображена правильная четырехугольная призма. Основания призмы – квадраты. Все диагонали правильной четырехугольной призмы равны, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

На рис. 14.6 изображен прямоугольный параллелепипед. Длины трех ребер с общей вершиной называются измерениями прямоугольного параллелепипеда. Отрезки $AB$, $AD$ и $AA_1$ называются измерениями.

Так как треугольники $ABC$ и $ACC_1$ – прямоугольные, то, следовательно, квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Если через соответственные диагонали оснований провести сечение, то мы получим диагональное сечение призмы. В прямых призмах диагональные сечения являются прямоугольниками. Через равные диагонали проходят равные диагональные сечения.

### V. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачи № 1184 (а, б), 1187, используя модели прямоугольного параллелепипеда и тетраэдра.

***Задача № 1184 (а, б)***

*Ответ:* а) прямоугольный параллелепипед имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин; б) тетраэдр имеет 4 грани, 6 ребер и 4 вершины.

***Задача № 1187***

*Ответ:* а) нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет.

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачу № 1188.

(Один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях.)

***Задача № 1188***

(Учитель объясняет построение сечения параллелепипеда плоскостью сначала по рисунку учебника (рис. 355 *а*, *б* на с. 321 учебника), а затем выполняет построение сечения на доске. Ученики записывают правила, а затем строят сечение в тетрадях.)

Правила.

1) Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.
2) Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.
3) Отрезки, по которым секущая плоскость пересекает две противоположные грани параллелепипеда, параллельны.

3. Работа в парах.

Решить задачу № 1185 с последующим обсуждением.

*Решение:*

а) Число вершин призмы определяется количеством вершин многоугольника, лежащего в основаниях призмы. Так как призма имеет два основания, то $n$-угольная призма имеет $2n$ вершин (четное число). Треугольная призма имеет $2 \cdot 3 = 6$ вершин; четырехугольная призма имеет $2 \cdot 4 = 8$ вершин; пятиугольная призма имеет $2 \cdot 5 = 10$ вершин.

б) Число ребер призмы равно сумме ребер двух оснований призмы и боковых ребер призмы, количество которых определяется числом вершин многоугольника, расположенного в основании призмы, т. е. $n$-угольная призма имеет число ребер, равное $2n + n = 3n$ (кратное 3).

4. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1189, 1193, 1194.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой раздел геометрии называется стереометрией?
2. Какие поверхности называются многогранниками? Приведите примеры простейших многогранников.
3. Объясните, что такое грани, ребра, вершины и диагонали многогранника.
4. Какая плоскость называется секущей плоскостью геометрического тела?
5. Что называется сечением тела?

### Домашнее задание

1. П. 122–125, 127.
2. Решить задачи № 1188, 1190, 1192 (учебник).

## Урок 61. Объем и площадь поверхности многогранника

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия объема и площади поверхности многогранника; рассмотреть свойства объема; познакомить учащихся с формулами для вычисления площади боковой поверхности, полной поверхности и объема прямой призмы; научить учащихся вычислять площадь поверхности и объем прямой призмы.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Фронтальная работа с классом.

– Дайте определение призмы.
– Дайте определение прямой призмы.
– Дайте определение правильной призмы.
– Объясните, что такое параллелепипед.
– Дайте определение прямого параллелепипеда.
– Дайте определение прямоугольного параллелепипеда.
– Сформулируйте свойство четырех диагоналей параллелепипеда.
– Что такое измерения прямоугольного параллелепипеда?
– Сформулируйте свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда.

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задачи № 1190.)

**III. Определение темы урока**

Работа в группах.

Решить задачи № 1, 2.

***Задача 1.*** Кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 25 см, 12 см и 6,5 см. Плотность кирпича 1,8 г/см$^3$. Найдите его массу.

***Задача 2.*** Хватит ли 2,5 кг краски для покраски стен комнаты, если длина комнаты равна 3,8 м, ширина – 2,7 м, высота – 2,6 м? Расход краски на 1 м$^2$ составляет 75 г/м$^3$.

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

**IV. Работа по теме урока**

1. Вычисление площади боковой поверхности прямой призмы.

Решить задачу № 1186.

***Задача № 1186***

***Решение:*** Площадь боковой поверхности прямой призмы равна сумме площадей ее боковых граней. Пусть $a$, $b$, $c$, $d$, ..., $m$ – стороны основания призмы, $h$ – ее боковое ребро.

У прямой призмы все боковые ребра перпендикулярны к плоскостям оснований, т. е. боковые грани – прямоугольники. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Следовательно, $S_{бок} = ah + bh + ch + dh + ... + mh = h \cdot (a + b + c + d + ... + m) = Ph$, где $P$ – периметр основания, $h$ – боковое ребро.

***Ответ:*** $S_{бок} = Ph$.

2. Вычисление площади поверхности прямой призмы.

***Формула для вычисления площади поверхности прямой призмы:***

$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}$.

Эта формула справедлива для любой призмы.

3. Вычисление объема тела.

(Понятие объема тела вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры.)

За единицу измерения объемов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называется кубическим сантиметром и обозначается 1 см$^3$. Аналогично определяются кубический метр (м$^3$), кубический миллиметр (мм$^3$) и т. д.

Основные свойства объемов.

1) Равные тела имеют равные объемы.

2) Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел (рис. 347 на с. 307 учебника): $V = V_1 + V_2$.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений: $V = a \cdot b \cdot c$.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся принципом Кавальери.

(Учитель объясняет принцип Кавальери (рис. 348 на с. 307, 308 учебника).)

В прямоугольном параллелепипеде с измерениями $a$, $b$, $c$, где $a$ и $c$ – измерения основания параллелепипеда, $b$ – высота, площадь $S$ основания равна $ac$, а высота $h$ равна боковому ребру $h = b$.

Поэтому формулу $V = a \cdot b \cdot c$ можно записать в виде $V = S \cdot h$, т. е. объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

### V. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 1195 (устно).
2. Работа в парах.

Решить задачу № 1200 (а, в) с последующим обсуждением.

3. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1196, 1200 (б, г).

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Как вычислить площадь боковой поверхности прямой призмы?
2. Как вычислить площадь полной поверхности прямой призмы?
3. Объясните, что такое объем тела.
4. Сформулируйте основные свойства объема.
5. Чему равен объем прямой призмы?

### Домашнее задание

1. П. 126.
2. Решить задачи № 1191, 1197, 1199 (учебник).

## Урок 62. Пирамида

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия пирамиды, ее боковой поверхности, основания, боковых граней, ребер, вершин, высоты; ввести понятие правильной пирамиды, тетраэдра, апофемы; научить учащихся вычислять площадь поверхности и объем пирамиды; научить учащихся использовать изученный материал при решении простейших задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Фронтальная работа с классом.

– Что значит «объем тела»?
– Перечислите единицы измерения объемов.
– Сформулируйте основные свойства объемов.
– Чему равен объем куба?
– Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда?
– Какая формула используется для вычисления объема призмы?
– Какая формула используется для вычисления площади боковой поверхности прямой призмы?

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 1197, 1199.)

### III. Определение темы урока

(Рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

Фронтальная работа с классом.

– Какие фигуры изображены на рис. 14.7–14.10?
– Что такое пирамида?

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

### IV. Работа по теме урока

(В ходе изложения нового материала учитель записывает краткий план-конспект на доске, ученики – в тетрадях.)

1. План-конспект.

Многогранник, составленный из $n$-угольника в основании и $n$-треугольников, которые образовались при соединении точки вершины пирамиды со всеми вершинами многоугольника основания, называется $n$-угольной пирамидой. Основание пирамиды – $n$-угольник. Треугольники – боковые грани пирамиды. Общая вершина треугольников – вершина пирамиды. Ребра, выходящие из вершины, – боковые ребра пирамиды. Перпендикуляр, проведенный от вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды.

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник и высота соединяет вершину пирамиды с центром правильного многоугольника, называется правильной. У правильной

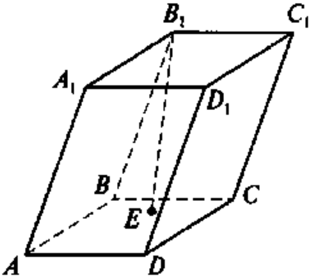



Рис. 14.7

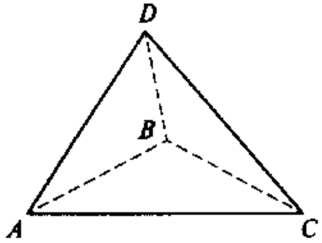



Рис. 14.8

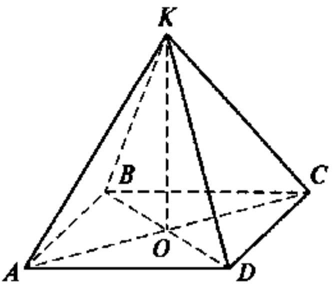



Рис. 14.9

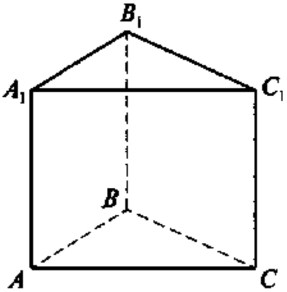



Рис. 14.10

пирамиды все боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Если провести высоты этих треугольников, то они также будут равны. Высота боковой грани правильной пирамиды – апофема.

Если у правильной треугольной пирамиды все боковые грани – равносторонние треугольники (равные с основанием), то такую пирамиду называют правильным тетраэдром.

Если у многоугольника в основании есть диагонали, то через эти диагонали и вершину пирамиды можно провести диагональное сечение.

2. Работа в группах.

(Рисунки к заданиям подготовить на доске заранее.)

Выполните задания, используя рис. 14.11–14.14.

***Задание 1.*** Дайте названия каждой пирамиде.

***Задание 2.*** Покажите основания, боковые грани, ребра, вершины пирамид.

***Задание 3.*** Покажите высоту пирамиды на рис. 14.11, 14.12, 14.14.

***Задание 4.*** На рис. 14.12 укажите апофему.

***Задание 5.*** На каком рисунке проведено диагональное сечение пирамиды?

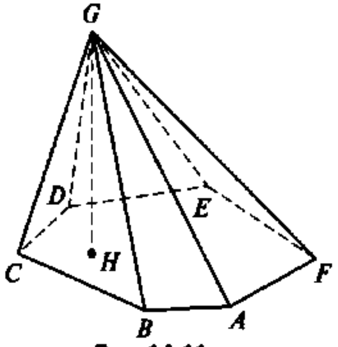



Рис. 14.11

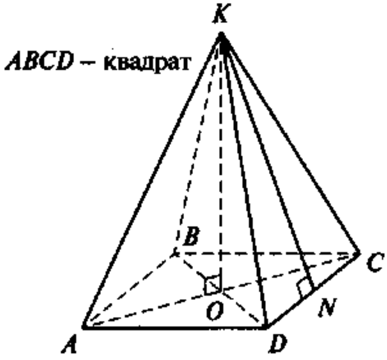



Рис. 14.12

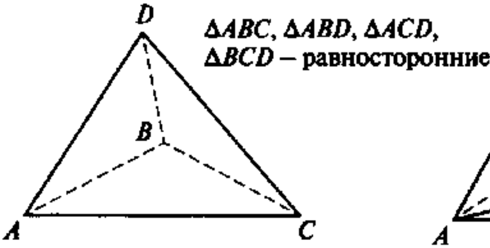



Рис. 14.13

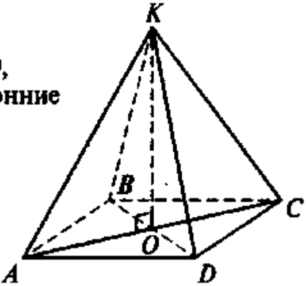



Рис. 14.14

На доске и в тетрадях запись:

*Площадь боковой поверхности пирамиды:*

$S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot h$, где $h$ – апофема.

Для пирамид, которые не являются правильными, необходимо определить отдельно площадь поверхности каждой боковой грани.

*Площадь полной поверхности любой пирамиды:*

$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}$

*Объем любой пирамиды:*

$V = 13 \cdot S_{осн} \cdot H$, где $H$ – высота пирамиды.

**V. Закрепление изученного материала**

1. Решить устно задачу № 1201, используя модель тетраэдра.

*Ответ:* Нет.

2. Работа в парах.

Решить задачу № 1202 (а) с последуюшим обсуждением.

***Задача № 1202 (а)*** (рис. 14.15)

*Решение:*

1) Прямая $MN$ принадлежит плоскости $BCD$, которая пересекается с плоскостью $ABC$ по $BC$.

2) Продолжим $BC$ до пересечения с прямой $MN$ в точке $K$.

3) Точка $K$ принадлежит и прямой $MN$, и плоскости $ABC$, так как точка $K$ лежит на прямой $BC$, принадлежащей плоскости $ABC$.

3. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1203, 1204, 1206 с последующей самопроверкой.

***Задача № 1203*** (рис. 14.16)

*Решение:*

1) По условию $MA = NA$.

2) Проведем отрезок $AL$, так как точки $A$ и $L$ принадлежат одной плоскости $MNL$.

3) Проведем отрезок $AK$, так как точки $A$ и $K$ принадлежат одной плоскости $MKN$.

4) Искомое сечение – треугольник $AKL$.

***Задача № 1204*** (рис. 14.17)

*Решение:*

1) Проведем прямую $MN$, продолжим $AB$ до пересечения с прямой $MN$ в точке $X$.

2) Точка $X$ принадлежит плоскости $ABC$ и точка $K$ принадлежит плоскости $ABC$. Проведем прямую $XK$, пересекающую прямые $BC$ и $AC$ в точках $P$ и $H$ соответственно.

3) Проведем отрезки $MP$, $NH$ и $PH$.

Четырехугольник $PMNH$ – искомое сечение.

***Задача № 1206***

*Решение:* Докажем, что $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot h$, где $P$ – периметр основания, $h$ – апофема правильной пирамиды.

Найдем сумму площадей боковых граней правильной пирамиды. Так как боковыми гранями правильной пирамиды являются равные равнобедренные треугольники и площадь треуголь-

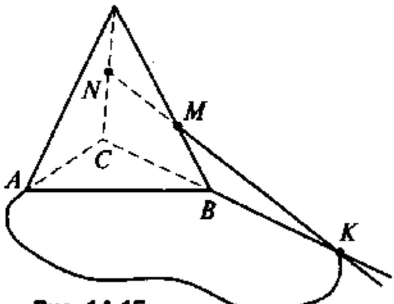



**Рис. 14.15**

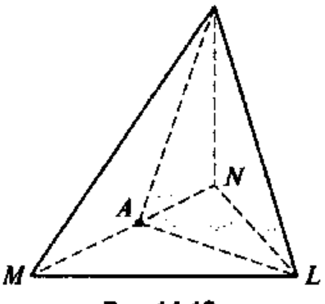



**Рис. 14.16**

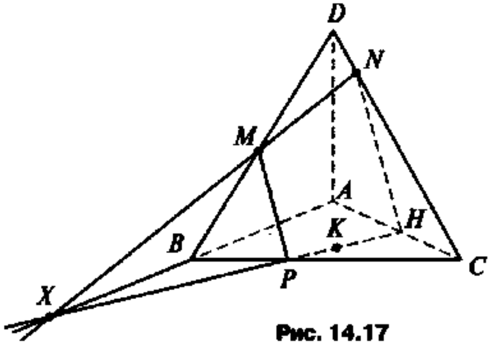



Рис. 14.17

ника равна $\frac{1}{2}a \cdot h$, то сумма площадей всех треугольников равна $\frac{1}{2}a \cdot n \cdot h = \frac{1}{2}(a \cdot n) \cdot h = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot h$, где $a$ — сторона основания правильной пирамиды, $n$ — количество сторон основания, $h$ — апофема.

Значит, площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot h$.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» — правильно решены три задачи;
- оценка «4» — правильно решены две задачи;
- оценка «3» — правильно решена одна задача;
- оценка «2» — не ставится.

## VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какой многогранник называется пирамидой?
2. Покажите на модели основание, боковые грани, ребра, вершину, высоту пирамиды.
3. Какая пирамида называется правильной?
4. Что такое апофема правильной пирамиды?
5. Что значит «диагональное сечение пирамиды»?
6. Какая формула используется для вычисления площади боковой поверхности пирамиды?
7. Какая формула используется для вычисления площади полной поверхности пирамиды?
8. Какая формула используется для вычисления объема пирамиды?

## Домашнее задание

1. П. 128.
2. Решить задачи № 1207, 1210, 1211.

# Урок 63. Цилиндр и конус

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия цилиндра, цилиндрической поверхности, основания, оси, образующей, высоты, радуса цилиндра; ввести понятия конуса, конической поверхности, основания, оси, образующей, высоты конуса; научить учащихся вычислять площадь поверхности и объем цилинра и конуса; научить учащихся использовать изученный материал при решении простейших задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Фронтальная работа с классом.

(Рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

– Какой многогранник называется пирамидой?
– Покажите основание, боковые грани, ребра, вершину, высоту пирамид, изображенных на рис. 14.18 и 14.19.
– Какая пирамида называется правильной?
– При каких условиях пирамиды на рис. 14.18 и 14.19 будут правильными?
– Что такое апофема правильной пирамиды?
– Как построить апофему пирамиды, изображенной на рис. 14.19?
– Что такое диагональное сечение пирамиды? Покажите диагональные сечения пирамиды, изображенной на рис. 14.19.
– Какая формула используется для вычисления площади боковой поверхности пирамиды?
– Какая формула используется для вычисления площади полной поверхности пирамиды?

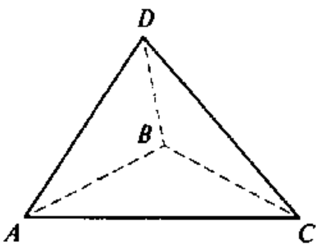


Рис. 14.18

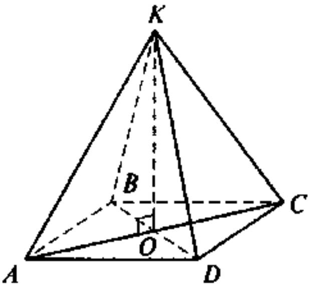


Рис. 14.19

2. Проверка домашнего задания.

(Учитель проверяет решение задач № 1207, 1210, 1211.)

## III. Определение темы урока

Фронтальная работа с классом.

–Какое геометрическое тело получится при вращении:

а) прямоугольника вокруг одной из его сторон;

б) прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов?

– Вычислите площадь поверхности и объем образовавшегося тела.

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## IV. Работа по теме урока

(В ходе изложения нового материала учитель записывает краткий план-конспект на доске, ученики – в тетрадях. Рисунки подготовить на доске заранее.)

План-конспект.

1) Цилиндр.

Цилиндр можно получить вращением прямоугольника $AA_1O_1O$ вокруг одной из его сторон $OO_1$ или прямоугольника $AA_1B_1B$ вокруг прямой $OO_1$, которая проходит через серединные точки противолежащих сторон (рис. 14.20).

Прямая $OO_1$ называется осью цилиндра, $AA_1$ и $BB_1$ – образующие цилиндра. Высота $H$ цилиндра совпадает с любым из отрезков $OO_1 = AA_1 = BB_1$. Два круга, которые образовались при вращении, называются основаниями цилиндра.

Радиус цилиндра $R = OA = OB$ – это радиус его основания. Осевым сечением цилиндра называется сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось. Осевым сечением цилиндра (прямого цилиндра) является прямоугольник, на рис. 14.20 – это прямоугольник $AA_1B_1B$.

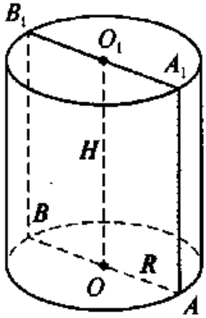



Рис. 14.20

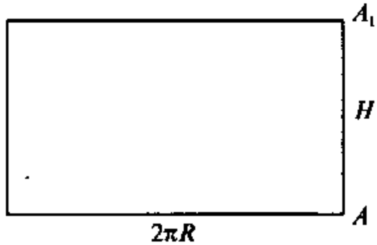



Рис. 14.21

Развертка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник (рис. 14.21).

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает задание. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении участвует весь класс.)

Вывести формулу для вычисления:

а) площади боковой поверхности прямого цилиндра;

б) площади полной поверхности прямого цилиндра;

в) объем прямого цилиндра.

После обсуждения на доске и в тетрадях запись:

*Площадь боковой поверхности прямого цилиндра:*

$S_{бок} = 2\pi RH$, где $2\pi R$ – длина окружности основания цилиндра, $H$ – высота цилиндра.

*Площадь полной поверхности прямого цилиндра:*

$S = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi RH + 2\pi R^2$.

*Объем прямого цилиндра:*

$V = \pi R^2 H$, где $\pi R^2$ – площадь основания цилиндра, $H$ – высота цилиндра.

(Вывод данной формулы приведен в задаче № 1213).

2) Конус.

Конус можно получить вращением прямоугольного треугольника $POA$ вокруг одного из его катетов $PO$ или равнобедренного треугольника $APB$ вокруг прямой $PO$, проходящей через вершину $P$ и середину $O$ основания треугольника (рис. 14.22).

Осью прямого конуса называется прямая $PO$, содержащая его высоту $H$.

Осевое сечение конуса, проходящее через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны $PA$ и $PB$ являются образующими $l$ конуса.

Радиус конуса $R = OA = OB$ – это радиус основания.

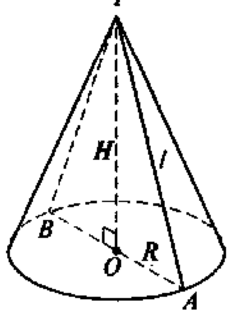



Рис. 14.22

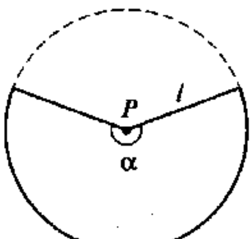



Рис. 14.23

Развертка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор (рис. 14.23).

Радиус этого сектора равен образующей конуса, то есть равен $l$, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, то есть равна $2\pi r$.

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает задание. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении участвует весь класс.)

Вывести формулу для вычисления:

а) площади боковой поверхности прямого конуса;

б) площади полной поверхности конуса.

После обсуждения на доске и в тетрадях запись:

*Площадь боковой поверхности конуса:*

$S_{бок} = \dfrac{\pi l^2}{360}\alpha$, или $S_{бок} = \pi Rl$, где $l$ – образующая, $R$ – радиус основания.

*Площадь полной поверхности конуса:*

$S = S_{бок} + S_{осн} = \pi Rl + \pi R^2$,

*Объем конуса:*

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$, где $R$ – радиус основания, $H$ – высота конуса.

(Вывод данной формулы дан в задаче № 1219).

**V. Закрепление изученного материала**

1. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1214 (б), 1220 (б).

(Два ученика работают у доски, остальные – в тетрадях.)

***Задача № 1214 (б)***

*Дано:* $V = 120$ см$^3$, $h = 3{,}6$ см.

***Найти:*** $r$.

***Решение:*** $V = Sh$, отсюда $S = \dfrac{V}{h} = \dfrac{120}{3{,}6} = \dfrac{1200}{36} = \dfrac{100}{3}$ см$^2$.

$S_{круга} = \pi r^2$, отсюда $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{100}{3\pi}} = \dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см.

*Ответ:* $\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см.

***Задача № 1220 (б)***

*Дано:* $r = 4$ см, $V = 48\pi$ см$^3$.

***Найти:*** $h$.

***Решение:*** $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, отсюда $h = \dfrac{3V}{\pi r_2} = \dfrac{3 \cdot 48\pi}{\pi \cdot 16} = 9$ см.

*Ответ:* 9 см.

2. Работа в парах.

Решить задачи № 1214 (в), 1220 (в) с последующей проверкой.

3. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1216, 1217, 1221, 1222 с последующей проверкой и самооценкой.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены три-четыре задачи;
- оценка «4» – правильно решены две задачи;
- оценка «3» – правильно решена одна задача;
- оценка «2» – не ставится.

### VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какое геометрическое тело называют цилиндром? конусом?
2. Объясните, что такое цилиндрическая поверхность, коническая поверхность.
3. У цилиндра, изображенного на рис. 14.20, назовите основания, ось, образующую, высоту, радиус.
4. У конуса, изображенного на рис. 14.22, назовите основание, ось, образующую, высоту.
5. Как вычислить площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем цилиндра?
6. Как вычислить площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем конуса?

### Домашнее задание

1. П. 129, 130.
2. Решить задачи № 1214 (а), 1220 (а), 1223.

## Урок 64. Сфера и шар

***Основные дидактические цели урока:*** ввести понятия сферы, центра, радиуса и диаметра сферы; ввести понятия шара, центра, радиуса и диаметра шара; научить учашихся вычислять площадь поверхности сферы и объем шара; научить учащихся использовать изученный материал при решении простейших задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

– Какое геометрическое тело называется цилиндром?

– Какое геометрическое тело называется конусом?

– Используя модели цилиндра и конуса:

а) объясните, что такое цилиндрическая поверхность, коническая поверхность;

б) покажите основания, ось, образующую, высоту, радиус цилиндра;

в) покажите основание, ось, образующую, высоту конуса.

– Как вычислить площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем цилиндра?

– Как вычислить площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем конуса?

2. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1215, 1218 с последующей проверкой.

## III. Определение темы урока

Фронтальная работа с классом.

Решить задачу № 1228.

(Учитель и ученики определяют тему и цель урока.)

## IV. Работа по теме урока

(В ходе изложения нового материала учитель записывает краткий план-конспект на доске, ученики – в тетрадях. Рисунки подготовить на доске заранее.)

План-конспект.

Множество всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки, называется сферой. Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

Сфера получается при вращении полукруга или круга вокруг его диаметра $AB$ как оси (рис. 14.24). Граница шара называется шаровой поверхностью или сферой. Точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра $O$ на расстояние, равное радиусу $R$.

Любой отрезок (например, отрезки $OA$, $OB$, $OC$ на рис. 14.24), соединяющие центр шара с точкой шаровой поверхности, называется радиусом. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется диаметром (например, отрезок $AB$ на рис. 14.24). Концы любого диаметра называются диаметрально противоположными точками шара.

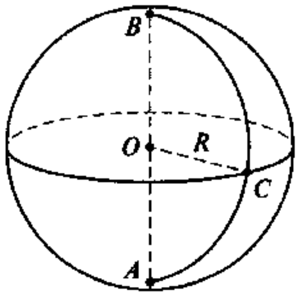


Рис. 14.24

Сечение шара плоскостью, проходящей через его центр, называется большим кругом, а сечение сферы – большой окружностью.

(Учитель делит класс на группы. Каждая группа получает задание. По окончании работы представители групп объясняют решение, в обсуждении участвует весь класс.)

Вывести формулу для вычисления объема шара.

После обсуждения на доске и в тетрадях запись:

*Объем шара:*

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где $R$ – радиус шара.

*Площадь сферы:*

$S = 4\pi R^2$.

## V. Закрепление изученного материала

1. Самостоятельное решение задач.

Решить задачу № 1226.

(Два ученика работают у доски, остальные – в тетрадях.)

2. Работа в парах.

Решить задачи № 1227, 1230 с последующей проверкой.

3. Самостоятельное решение задач.

Решить задачи № 1229, 1231.

## VI. Рефлексия учебной деятельности

1. Какое геометрическое тело называют сферой? шаром?
2. Объясните, что такое сферическая поверхность.
3. Что такое центр, радиус, диаметр сферы?
4. По какой формуле вычисляют площадь сферы?
5. По какой формуле вычисляют объем шара?

## Домашнее задание

1. П. 131.
2. Прочитать приложение 1 (учебник, с. 337–341).

# ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ

***Формируемые УУД: предметные:*** повторить основной теоретический материал курса планиметрии; совершенствовать навыки решения планиметрических задач; *метапредметные:* анализировать и осмысливать изучаемый теоретический материал; извлекать из услышанного на уроке и прочитанного в учебнике основную информацию; доказывать и опровергать утверждения, используя очевидные или известные геометрические факты; моделировать с помощью схематических рисунков, строить логические цепочки; оценивать полученный результат, осуществлять самоконтроль; *личностные:* овладение системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования; формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, способность к преодолению трудностей; воспитание культуры личности, отношения к геометрии как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости геометрии для научно-технического прогресса.

## Урок 65. Повторение по темам «Начальные геометрические сведения», «Параллельные прямые»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме урока; совершенствовать навыки решения задач.

# Ход урока

## I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

## II. Актуализация знаний учащихся

(Повторение теоретических сведений проводится с использованием п. 1 Приложения (см. с. 369). Учитель дает 2–3 мин на повторение.)

## III. Теоретический тест

(Задания теста выполняются самостоятельно с последующей самопроверкой.)

1. Если $a \perp c$, $b \perp c$, то:
   а) $a \parallel b$; б) $a \perp b$; в) $a \cap b$.
2. Если $a \parallel c$, $b \parallel c$, то:
   а) $a \perp b$; б) $a \cap b$; в) $a \parallel b$.
3. Если $a \parallel b$, $c$ – секущая (рис. 1), то:
   а) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;
   б) $\angle 5 = \angle 2$;
   в) $\angle 1 + \angle 3 = 180°$.
4. Условие параллельности прямых $a$ и $b$ (рис. 2):
   а) $\angle 1 + \angle 4 = 180°$; б) $\angle 1 = \angle 2$; в) $\angle 3 = \angle 2$.
5. Условие параллельности прямых $PR$ и $QD$ (рис. 3):
   а) $\angle 2 = \angle 6$, б) $\angle 8 = \angle 4$, в) $\angle 3 = \angle 7$.
6. Один из углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равен 73°. Остальные углы равны:
   а) 73°; б) 73° и 107°; в) 73° и 163°.
7. Если точка $C$ лежит на отрезке $AB$, то:
   а) $AB < AC + CB$;
   б) $AB = AC + CB$;
   в) $AB > AC + CB$.
8. Если луч $OC$ проходит между сторонами угла $AOB$, то:
   а) $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$;
   б) $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$;
   в) $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB$.

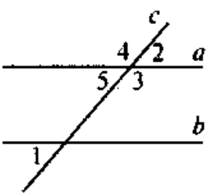


Рис. 1

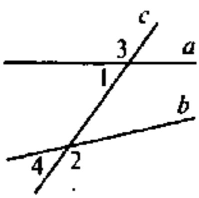


Рис. 2

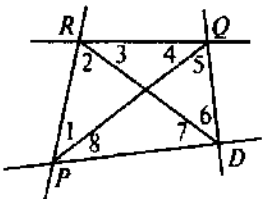


Рис. 3

9. Прямые $a$, $b$ и $c$ пересекаются в точке $O$ (рис. 4). $\angle 1$ равен:
а) 75°; б) 150°; в) 105°.

10. При пересечении двух прямых образовались четыре угла. Разность двух из них равна 52°. Эти углы:

а) смежные;

б) вертикальные;

в) накрест лежащие.

*Ответы к тесту:* 1 – а; 2 – в; 3 – в; 4 – в; 5 – а; 6 – б; 7 – б; 8 – а; 9 – в; 10 – а.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 9–10 баллов;
- оценка «4» – 7–8 баллов;
- оценка «3» – 5–6 баллов;
- оценка «2» – менее 5 баллов.

## IV. Решение задач по готовым чертежам с последующей самопроверкой

(Учащиеся решают задачи самостоятельно, записывая краткое решение в тетради, затем выполняют самопроверку по готовым ответам. Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

1. Параллельны ли прямые $a$ и $b$ (рис. 5)?

2. Рис. 6.

*Найти:* $\angle 1$, $\angle 2$.

3. *Дано:* $BD$ – биссектриса $\Delta ABC$ (рис. 7).

*Найти:* $\angle 1$.

4. *Дано:* $TK = KP$ (рис. 8).

*Найти:* $\angle 1$.

5. Рис. 9.

*Найти:* $\angle 1$.

6. *Дано:* $a \parallel b$, $AB = 4{,}2$ см (рис. 10).

*Найти:* $MN$.

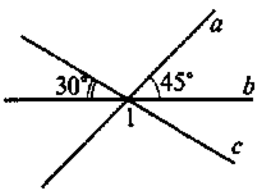



Рис. 4

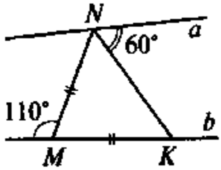



Рис. 5

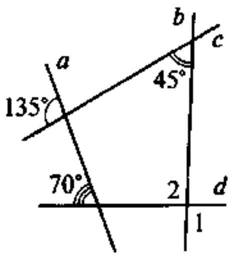



Рис. 6

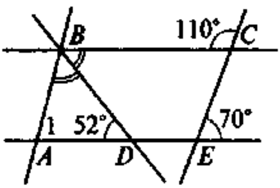



Рис. 7

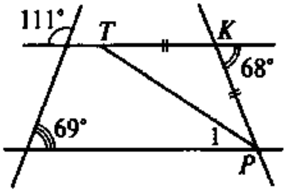



Рис. 8

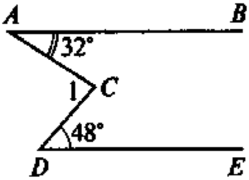



Рис. 9

7. Рис. 11.
*Найти:* $\angle EMN$.
8. Рис. 12.
*Найти:* $\angle ACK$.
9. *Дано:* $AB = 7$ см, $AM^2 - MB^2 = 7$ (рис. 13).
*Найти:* $AM$, $MB$.
10. *Дано:* $\frac{1}{3}AK = \frac{1}{4}BK$, $AB = 14$ см (рис. 14).
*Найти:* $AK$, $BK$.
11. *Дано:* $AB = 15{,}6$; $AD = 7{,}5$; $CB = 10{,}2$ (рис. 15).
*Найти:* $CD$.
12. *Дано:* $\angle BOC = 63°$, $\angle AOD = 57°$, $\angle AOB = 85°$ (рис. 16).
*Найти:* $\angle DOC$.

***Ответы к задачам по готовым чертежам:***

1. Нет. 2. $\angle 1 = \angle 2 = 70°$. 3. $\angle 1 = 76°$. 4. $\angle 1 = 34°$. 5. $\angle 1 = 80°$. 6. $MN = 8{,}4$ см. 7. $\angle EMN = 111°$. 8. $\angle ACK = 84°$. 9. $AM = 4$ см; $MB = 3$ см. 10. $AK = 6$ см; $BK = 8$ см. 11. $CD = 2{,}1$. 12. $\angle DOC = 35°$.

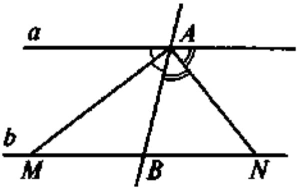



Рис. 10

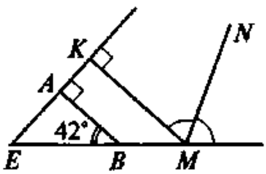



Рис. 11

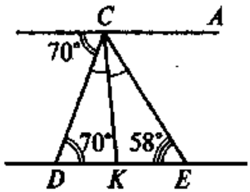



Рис. 12

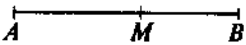
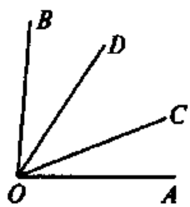



Рис. 13



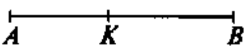




Рис. 14

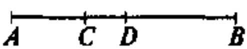



Рис. 15

Рис. 16

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 11–12 баллов;
- оценка «4» – 8–10 баллов;
- оценка «3» – 6–7 баллов;
- оценка «2» – менее 6 баллов.

**V. Решение задач**

Работа в парах.

1. На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $D$, $E$, $F$ так, что $\angle BDE = \angle BAC = 34°$, $\angle DEF = 52°$.

а) Найдите угол $EFC$.

б) Пересекаются ли прямые $AB$ и $FE$? Если да, то найдите угол между ними.

*Ответ:* а) $\angle EFC = 52°$; б) да; $\angle(AB, FE) = 18°$.

2. Биссектриса угла $A$ треугольника $ABC$ пересекает сторону $BC$ в точке $K$. На стороне $AB$ отмечена точка $N$ так, что $AN = NK$. Найдите углы треугольника $ANK$, если известно, что $\angle ABC = 40°$, а разность углов $BAC$ и $ACB$ равна $20°$.

*Ответ:* 40°; 40°; 100°.

3. Через точку $K$, лежащую на стороне $AB$ треугольника $ABC$, параллельно биссектрисе угла $A$ проведена прямая. Эта прямая пересекает продолжение стороны $AC$ за точку $A$ в точке $M$. Докажите, что $MA = AK$.

4. Через точку $A$ прямой $b$, параллельной прямой $l$, проведены прямые $AB$ и $AC$, пересекающие прямую $l$ в точках $B$ и $C$ так, что угол между прямыми $AB$ и $b$ равен $60°$, а угол между прямыми $AC$ и $b$ равен $40°$. Определите углы треугольника $ABC$.

*Ответ*: 60°; 40°; 80°.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

**VI. Рефлексия учебной деятельности**

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение теоретического теста, за решение задач по готовым чертежам, за самостоятельное решение задач.)

**Домашнее задание**

Повторить главы II, IV, VII, XI учебника (теория).

# Урок 66. Повторение по теме «Треугольники»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме урока; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

(Повторение теоретических сведений проводится с использованием пп. 2–4, 6, 7 Приложения (см. с. 370–372, 374–377). Учитель дает 5 мин на повторение.)

### III. Математический диктант с последующей самопроверкой

1. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна *половине гипотенузы*.

2. В треугольнике против большей стороны лежит *больший угол*.

3. Каждая сторона треугольника *меньше* суммы двух других его сторон.

4. Существуют следующие признаки равенства прямоугольных треугольников: *по двум катетам, по катету и прилежащему к нему острому углу, по гипотенузе и острому углу, по гипотенузе и катету*.

5. Площадь произвольного треугольника вычисляется по формуле: $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$; $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha$; $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $S=rp$; $S=\frac{abc}{4R}$, *где $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника, $r$ – радиус вписанной окружности, $R$ – радиус описанной окружности, $p$ – полупериметр*.

6. Медианы треугольника делят треугольник *на шесть равновеликих треугольников*.

7. По теореме, обратной теореме Пифагора, *если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник прямоугольный*.

8. Если в $\Delta MNK$ $\angle N=90°$ (рис. 17), $NP$ – его высота, то:

$NP = \ldots$ $(\sqrt{MP\cdot PK})$;

$MN = \ldots$ $(\sqrt{MP\cdot MK})$;

$NK = \ldots$ $(\sqrt{PK\cdot MK})$.

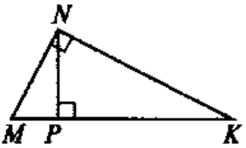


Рис. 17

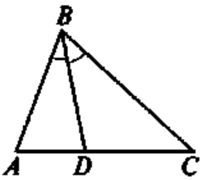


Рис. 18

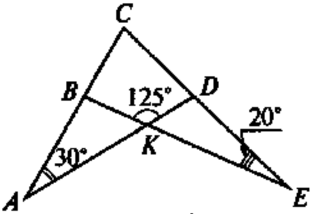


Рис. 19

9. Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

10. Если в $\Delta ABC$ (рис. 18) $BD$ – биссектриса, то:

$$\frac{AB}{BC} = \ldots\left(\frac{AD}{DC}\right);$$

$$\frac{S_{\text{ABD}}}{S_{\text{BDC}}} = \ldots\left(\frac{AD}{DC}\right).$$

11. По теореме косинусов в $\Delta MNK$ $MN^2 = (MK^2 + NK^2 - 2MK \cdot NK\cos\angle MKN)$.

12. По теореме синусов в $\Delta EST$ $\left(\dfrac{ES}{\sin\angle T} = \dfrac{ST}{\sin\angle E} = \dfrac{ET}{\sin\angle S}\right)$.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 11–12 баллов;
- оценка «4» – 8–10 баллов;
- оценка «3» – 6–7 баллов;
- оценка «2» – менее 6 баллов.

## IV. Решение задач по готовым чертежам

Работа в парах.

1. Рис. 19.

*Найти:* $\angle ACE$.

2. Рис. 20.

*Найти:* $MK$.

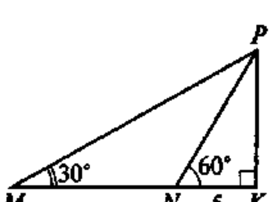


Рис. 20

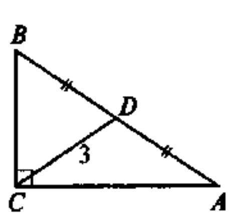


Рис. 21

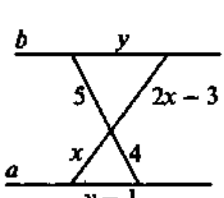


Рис. 22

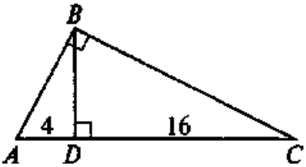


Рис. 23

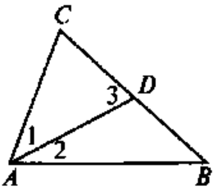


Рис. 24

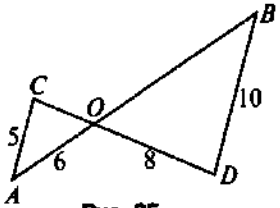


Рис. 25

3. Рис. 21.
*Найти:* $AB$.
4. *Дано*: $a \parallel b$ (рис. 22).
*Найти:* $x$; $y$.
5. Рис. 23.
*Найти:* $BD$.
6. *Дано:* $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $CD = 4$, $BC = 9$ (рис. 24).
*Найти:* $AC$.
7. *Дано:* $AC \parallel BD$ (рис. 25).
*Найти:* $CO$, $BO$.
8. *Дано:* $CE \parallel BF \parallel AK$, $CE + BF + AK = 21$ (рис. 26).
*Найти:* $CE$, $BF$, $AK$.
9. Рис. 27.
*Найти:* $S_{ABC} : S_{ACD}$.
10. *Дано:* $KM_1 = M_1P$, $AB \parallel MP$, $AB = 18$ (рис. 28).
*Найти:* $MP$.
11. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $AM = 10$ см (рис. 29).
*Найти:* $CF$.

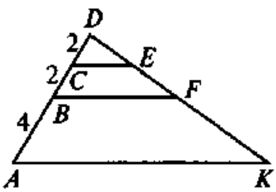


Рис. 26

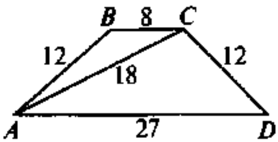


Рис. 27

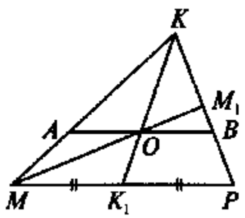


Рис. 28

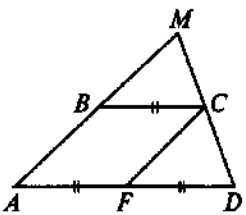


Рис. 29

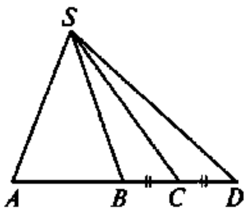


Рис. 30

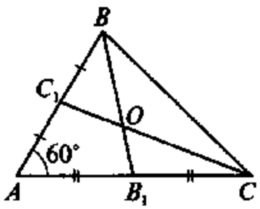


Рис. 31

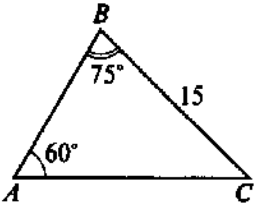


Рис. 32

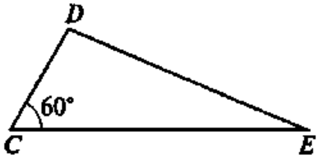


Рис. 33

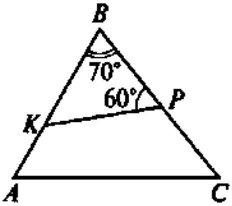


Рис. 34

12. *Дано:* $S_{\text{ASD}} = 16$, $AB = BD$ (рис. 30).
*Найти:* $S_{\text{BCS}}$.
13. $AB = 10$, $AC = 14$ (рис. 31).
*Найти:* $S_{\text{BOC}}$.
14. Рис. 32.
*Найти:* $AB$.
15. *Дано:* $DE$ в 2,5 раза больше $CD$ (рис. 33).
*Найти:* $\dfrac{CE}{CD}$.
16. *Дано:* $AB \cdot BK = CB \cdot BP$ (рис. 34).
*Найти:* $\angle A$, $\angle C$.
17. *Дано:* $MK = 8$ (рис. 35).
*Найти:* $PK$.
18. Рис. 36.
*Найти:* $OC$.

***Ответы к задачам по готовым чертежам:***

1. $\angle ACE = 75°$. 2. $MK = 15$. 3. $AB = 6$. 4. $x = 4$, $y = 5$. 5. $BD = 8$. 6. $AC = 6$. 7. $CO = 4$, $BO = 12$. 8. $CE = 3$, $BF = 6$, $AK = 12$. 9. $\dfrac{S_{\text{ABC}}}{S_{\text{ACD}}} = \dfrac{4}{9}$. 10. $MP = 27$. 11. $CF = 5$ 12. $S_{\text{BCS}} = 4$. 13. $S_{\text{BOC}} = \dfrac{35\sqrt{3}}{3}$. 14. $AB = 5\sqrt{6}$. 15. $\dfrac{CE}{CD} = \dfrac{1+\sqrt{22}}{2}$. 16. $\angle A = 60°$, $\angle C = 50°$. 17. $PK = 6$. 18. $OC = 4\sqrt{3}$.

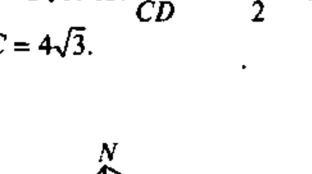


Рис. 35

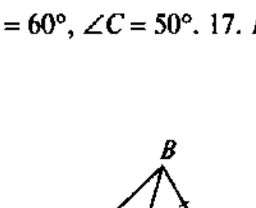


Рис. 36

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» — 14–18 баллов;
- оценка «4» — 10–13 баллов;
- оценка «3» — 6–9 баллов;
- оценка «2» — менее 6 баллов.

## V. Самостоятельное решение задач

1. Решить задачи № 1–5.

Рис. 37.

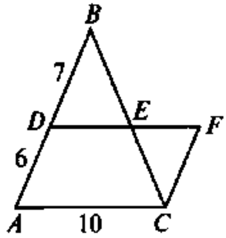


**Рис. 37**

(Если учащиеся не могут решить задачи, учитель задает наводящие вопросы.)

***Задача 1.*** *Дано:* $\Delta ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

*Доказать:* $\Delta ADE = \Delta CED$.

*Решение:* Так как $DF \parallel AC$, то $AD = EC$.

Так как $AB = BC$, то $\angle ADE = \angle DEC$, следовательно, $\Delta ADE = \Delta CED$ по двум сторонам и углу между ними.

Наводящие вопросы.

– На какие фигуры разбивает $\Delta ABC$ прямая $DE$, параллельная $AC$?

– Определите вид четырехугольника $ADEC$.

– Укажите равные элементы в треугольниках $ADE$ и $CED$.

***Задача 2.*** *Дано:* $\Delta ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

*Доказать:* $\Delta ECF \sim \Delta ABC$.

*Решение:* Так как $CF \parallel AB$, то $\angle ECF = \angle ABC$.

Так как $DE \parallel AC$, то $\angle FEC = \angle ECA$, следовательно, $\Delta ECF \sim \Delta ABC$ по второму признаку подобия треугольников.

Наводящие вопросы.

– Что вы можете сказать о сторонах $EF$ и $AC$ треугольников $ECF$ и $ABC$?

– Что вы можете сказать о сторонах $AB$ и $FC$ треугольников $ECF$ и $ABC$?

– Укажите в данных треугольниках равные углы.

***Задача 3.*** *Дано:* $\Delta ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

*Найти:* $EF$.

*Решение:*

$\Delta ABC \sim \Delta DBE$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{13}{7}$, тогда $DE = \dfrac{7}{13}, AC = \dfrac{70}{13}$.

$ADFC$ – параллелограмм, так как противолежашие стороны параллельны. Таким образом, $AC = DF$.

Тогда $EF = DF - DE = AC - DE = 10 - \frac{70}{13} = \frac{60}{13}$.

*Ответ:* $\frac{60}{13}$.

Наводящие вопросы.

– Что вы можете сказать о четырехугольнике $ADFC$?

– Найдите стороны $\Delta DBE$.

– Как найти $EF$, если $DF = 10$, $DE = \frac{70}{13}$.

***Задача 4.*** *Дано:* $\Delta ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

*Найти:* Высоту $\Delta ABC$, опушенную на боковую сторону.

*Решение:* $S_{\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+13+10}{2} = 18$.

$S_{\text{ABC}} = \sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} = 60$, отсюда $h_{\text{AB}} = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2} \cdot AB} = \frac{60}{\frac{1}{2} \cdot 13} = \frac{120}{13}$.

*Ответ:* $\frac{120}{13}$.

Наводящие вопросы.

– Какая связь существует между боковой стороной и высотой, проведенной к ней?

– Чему равна площадь $\Delta ABC$?

– Какая формула позволяет вычислить площадь треугольника по трем его известным сторонам?

– Как, зная площадь треугольника и его сторону, можно вычислить высоту, проведенную к этой стороне?

***Задача 5.*** *Дано:* $\Delta ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

*Найти:* $\frac{S_{\text{ADE}}}{S_{\text{DCF}}}$.

*Решение:* $\frac{S_{\text{ADE}}}{S_{\text{DCF}}} = \frac{S_{\text{CDE}}}{S_{\text{DCF}}} = \frac{DE}{DF} = \frac{70}{13} : 10 = \frac{7}{13}$.

*Ответ:* $\frac{7}{13}$.

Наводящие вопросы.

– Что вы можете сказать о высотах треугольников $ADE$ и $DCF$?

– Чему равно отношение площадей двух треугольников, высоты которых равны?

2. Решить дополнительные задачи.

(Дополнительные задачи решают более подготовленные учащиеся.)

***Дополнительные задачи***

1) Площадь треугольника $ABC$ равна 30 см². На стороне $AC$ взята точка $D$ так, что $AD : DC = 2 : 3$. Длина перпендикуляра $DE$, проведенного к стороне $BC$, равна 9 см. Найдите $BC$.

*Ответ:* $BC = 4$ см.

2) В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла; отрезок, соединяющий ее основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найдите углы треугольника.

*Ответ:* 30°; 60°; 90°.

3) Найдите длины сторон $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$, если $BC = 8$ см, а длины высот, проведенных к $AC$ и $BC$, равны соответственно 6,4 см и 4 см.

*Ответ:* $\sqrt{41}$ см; 5 см.

4) В треугольнике длины двух сторон составляют 6 см и 3 см. Найдите длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей стороне.

*Ответ:* 4 см.

5) Вычислите площадь равнобедренного треугольника, если длина высоты, проведенной к боковой стороне, равна 12 см, а длина основания равна 15 см.

*Ответ:* 75 см².

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «4» – правильно решены три задачи;
- оценка «3» – правильно решены две задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

## VI. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение математического диктанта, за решение задач по готовым чертежам, за самостоятельное решение задач.)

**Домашнее задание**

1. Выполнить работу П-1 (вариант 1), математический диктант МД-2 (вариант 1, задания 1–5). (См. Дидактические материалы по геометрии. 9 класс. Зив Б.Г., Мейлер В.М. М.: Просвещение, 1993.)
2. Повторить главы VIII, XII учебника.

## Урок 67. Повторение по теме «Окружность»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме урока; совершенствовать навыки решения задач.

### Ход урока

#### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

#### II. Актуализация знаний учащихся

(Задачи по готовым чертежам учащиеся решают самостоятельно с использованием п. 6 Приложения (см. с. 374–375) с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справилось большинство учащихся.)

#### III. Решение задач по готовым чертежам

Работа в парах.

1. *Дано:* $R = 3$ см, $AB = 15$ см (рис. 38).
*Найти:* $AK$, $KB$.

2. *Дано:* $B$ – точка касания, $\cup BK = 58°$ (рис. 39).
*Найти:* $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

3. *Дано:* $AB = 15$ (рис. 40).
*Найти:* $DC$, $BC$.

4. *Дано:* $P_{ABE} = 28$ (рис. 41).
*Найти:* $P_{DEC}$.

5. *Дано:* $CK = 16$, $CP = 6$, $CM = 24$ (рис. 42).
*Найти:* $DM$.

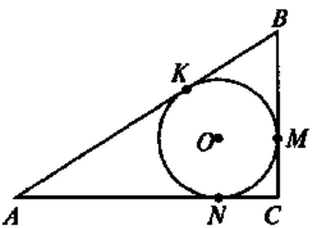


Рис. 38

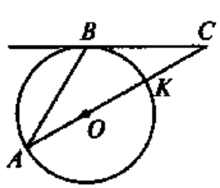


Рис. 39

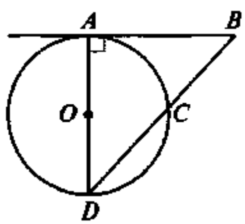


Рис. 40

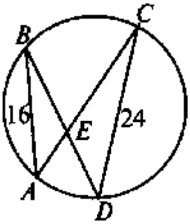



Рис. 41

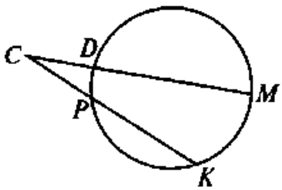



Рис. 42

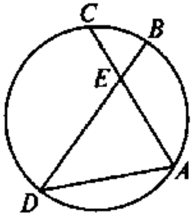



Рис. 43

6. *Дано:* $\angle CED$ в 9 раз больше $\angle BEC$, $\angle DAE$ на 61° больше $\angle BEC$ (рис. 43).

***Найти:*** $\angle BEC$.

7. Рис. 44.

***Найти:*** $\angle MNK$.

8. *Дано:* $AB$, $BC$ — касательные, $R = 11$ (рис. 45).

***Найти:*** $P_{AOCB}$.

9. *Дано:* $\cup BK = 40°$, $\cup AM = 100°$ (рис. 46).

***Найти:*** $\angle ABM$, $\angle BMK$, $\angle ACM$.

10. *Дано:* $R_1 = 10$, $R_2 = 5$ (рис. 47).

***Найти:*** Площадь кольца.

11. *Дано:* $R = 12$ (рис. 48).

***Найти:*** Площадь заштрихованной фигуры.

12. *Дано:* $R = 6$ (рис. 49).

***Найти:*** Площадь заштрихованной фигуры.

13. *Дано:* $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 2 : 3 : 4$, $R = 9$ (рис. 50).

***Найти:*** Длину дуги $BC$.

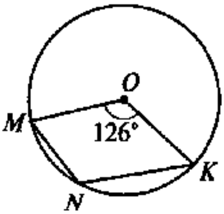



Рис. 44

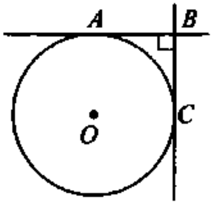



Рис. 45

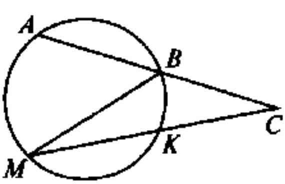



Рис. 46

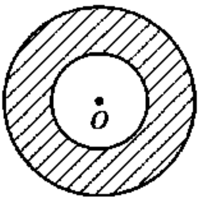



Рис. 47

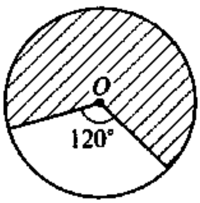



Рис. 48

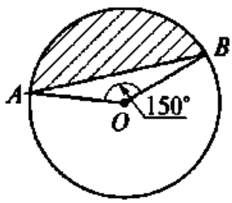



Рис. 49

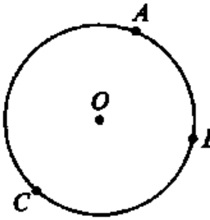



Рис. 50

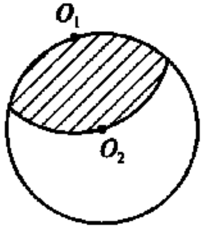



Рис. 51

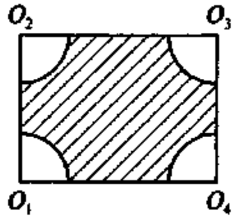



Рис. 52

14. *Дано:* $R_1 = R_2 = 5$ (рис. 51).
***Найти:*** Периметр заштрихованной фигуры.
15. *Дано:* $O_1O_2 = 15$, $O_2O_3 = 20$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4$ (рис. 52).
***Найти:*** Периметр заштрихованной фигуры.
***Ответы к задачам по готовым чертежам:***

1. 6 см; 9 см. 2. $\angle A = 29°$; $\angle B = 119°$; $\angle C = 32°$. 3. $BC = 9$; $CD = 16$. 4. $P_{DEC} = 42$ см. 5. $DM = 20$. 6. $\angle CBE = 79°$. 7. $\angle MNK = 117°$. 8. $BC = 11\sqrt{2}$. 9. $\angle ABM = 50°$; $\angle BMK = 20°$; $\angle ACM = 30°$. 10. $75\pi$. 11. $96\pi$. 12. $15\pi - 9$. 13. $6\pi$. 14. $\frac{20\pi}{3}$. 15. $38 - 8\pi$.

*Критерии оценивания:*
За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.
- оценка «5» – 13–15 баллов;
- оценка «4» – 10–12 баллов;
- оценка «3» – 7–9 баллов;
- оценка «2» – менее 7 баллов.

**IV. Самостоятельное решение задач**

1. В треугольник вписана окружность так, что три из шести получившихся отрезков касательных равны 3 см, 4 см, 5 см. Определите вид треугольника.

2. Точки $A$ и $B$ делят окружность с центром $O$ на дуги $AMB$ и $ACB$ так, что дуга $ACB$ на 60° меньше дуги $AMB$, $AM$ – диаметр окружности. Найдите углы $AMB$, $ABM$, $ACB$.

3. Хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $E$ так, что $AE = 3$ см, $BE = 36$ см, $CE : DE = 3 : 4$. Найдите $CD$ и наименьшее значение радиуса этой окружности.

4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а биссектриса, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, и радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 20 см, 26 см и 26 см.

6. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

7. Точка $M$ лежит на хорде $AB$ так, что $AM : BM = 4 : 3$, $AB = 14$ см. Расстояние от центра окружности до точки $M$ равно 4 см. Найдите радиус окружности.

8. Точка $O$ равноудалена от сторон треугольника $ABC$, $\angle ACO = 34°$. Найдите $\angle AOB$.

*Ответы к задачам для самостоятельного решения:*

1. Прямоугольный. 2. $\angle AMB = 75°$; $\angle ABM = 90°$; $\angle ACB = 105°$. 3. 19,5 см. 4. $r = 3$ см; $R = 6{,}25$ см. 5. $r = 6\frac{2}{3}$ см; $R = 14\frac{1}{12}$ см. 6. 94,08 см$^2$. 7. 8 см. 8. 124°.

*Критерии оценивания:*

- оценка «5» – правильно решены шесть–восемь задач;
- оценка «4» – правильно решены четыре-пять задач;
- оценка «3» – правильно решены две-три задачи;
- оценка «2» – правильно решены менее двух задач.

### V. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за решение задач по готовым чертежам и за самостоятельное решение задач.)

### Домашнее задание

1. Повторить теорию, используя пп. 5–10 Приложения.
2. Решить задачи, с которыми ученик не справился на уроке.

## Урок 68. Повторение по темам «Четырехугольники», «Многоугольники»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме урока; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

(Повторение теоретических сведений проводится с использованием пп. 5, 10 Приложения (см. с. 372–374, 378). Учитель дает 5–7 мин на повторение.)

### III. Теоретический тест

(Задания теста выполняются самостоятельно с последующей самопроверкой.)

***Вариант 1***

1. Любой прямоугольник является:
   а) ромбом;
   б) квадратом;
   в) параллелограммом.

2. Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник:
   а) ромб;
   б) параллелограмм;
   в) прямоугольник.

3. Ромб – это четырехугольник, в котором:
   а) диагонали взаимно перпендикулярны, а противолежащие стороны параллельны и равны;
   б) диагонали взаимно перпендикулярны и равны;
   в) противолежащие углы равны, а противолежащие стороны параллельны.

4. Если четырехугольник вписан в окружность, то:
   а) суммы его противоположных сторон равны;
   б) сумма противоположных углов равна 180°;
   в) суммы противоположных сторон и углов равны.

5. В равнобедренной трапеции:
   а) диагонали точкой пересечения делятся пополам;
   б) диагонали являются биссектрисами ее углов;
   в) диагонали равны.

6. Если $ABCD$ – ромб, то его площадь можно вычислить по формуле:

   а) $S = \frac{1}{2}AB \cdot AD$;

   б) $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$;

   в) $S = AC \cdot BD$.

7. Радиус описанной около правильного $n$-угольника окружности вычисляется по формуле:

   а) $R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$;

   б) $R = 2a_n\sin\dfrac{180^\circ}{n}$;

в) $R = a_n \sin\frac{360°}{n}$.

8. Сумма внутренних углов выпуклого $n$-угольника равна:

а) 360°;

б) $180° \cdot (n - 2)$;

в) $180° \cdot n$.

9. Площадь правильного многоугольника вычисляется по формуле:

а) $S = Pr$;

б) $S = PR$;

в) $S = R^2 \sin\frac{360°}{n}$.

***Вариант 2***

1. Любой ромб является:

а) параллелограммом;

б) квадратом;

в) прямоугольником.

2. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм:

а) квадрат;

б) прямоугольник;

в) ромб.

3. Прямоугольник – это четырехугольник, в котором:

а) диагонали точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами его углов;

б) противолежащие стороны параллельны, а диагонали равны;

в) два угла прямые и две его стороны равны.

4. Если четырехугольник описан около окружности, то:

а) суммы его противоположных сторон равны;

б) сумма противоположных углов равна 180°;

в) суммы противоположных сторон и углов равны.

5. Средней линией трапеции является отрезок:

а) параллельный основаниям и равный полусумме двух ее сторон;

б) соединяющий две точки на боковых сторонах;

в) соединяющий вершины боковых сторон.

6. Если $ABCD$ – квадрат, то его площадь можно вычислить по формуле:

а) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$;

б) $S = \frac{1}{2}AB \cdot AD$;

в) $S = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$.

7. Радиус вписанной в правильный $n$-угольник окружности вычисляется по формуле:

а) $r = 2a_n \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$;

б) $r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$;

в) $r = a_n \operatorname{tg}\frac{360°}{n}$.

8. Внешний угол правильного $n$-угольника равен:

а) $\frac{180°(n-2)}{n}$;

б) $\frac{360°}{n-2}$;

в) $\frac{360°}{n}$.

9. Зависимость между радиусом вписанной и описанной около правильного $n$-угольника окружности вычисляется по формуле:

а) $r = R\cos\frac{180°}{n}$;

б) $r = \dfrac{R}{\cos\frac{180°}{n}}$;

в) $r = R\cos\frac{360°}{n}$.

*Ответы к тесту:*

***Вариант 1:*** 1 – в; 2 – б; 3 – а; 4 – б; 5 – в; 6 – б; 7 – а; 8 – б; 9 – в.

***Вариант 2:*** 1 – а; 2 – в; 3 – б; 4 – а; 5 – в; 6 – а; 7 – б; 8 – в; 9 – а.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 8–9 баллов;
- оценка «4» – 6–7 баллов;
- оценка «3» – 4–5 баллов;
- оценка «2» – менее 4 баллов.

**IV. Решение задач**

(Задачи по готовым чертежам учащиеся решают самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справилось большинство учащихся.)

1. Решить задачи по готовым чертежам.

1) *Дано:* $ABCD$ – ромб (рис. 53).

*Найти:* $MN$.

2) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 54).

*Найти:* $\angle CBK$.

3) *Дано:* $ABCD$ – ромб (рис. 55).

*Найти:* $AC$.

4) *Дано:* $ABCD$ – ромб, $BE$ – биссектриса $\angle ABD$ (рис. 56).

*Найти:* $\angle BCD$.

5) *Дано:* $ABCD$ – квадрат, $P_{ABCD} = 8$ (рис. 57).

*Найти:* $P_{MNKP}$.

6) *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм (рис. 58).

*Найти:* $BE$.

7) *Дано:* $AC = 12$, $S_{ABCD} = 48$ (рис. 59).

*Найти:* $BD$.

8) *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $BC : AD = 2 : 3$, $BK = 6$, $S_{ABCD} = 60$ (рис. 60).

*Найти:* $BC$, $AD$.

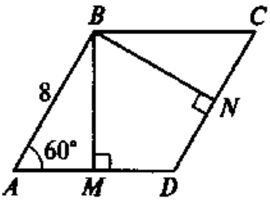



Рис. 53

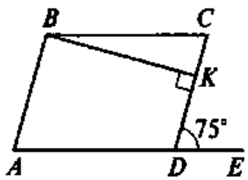



Рис. 54

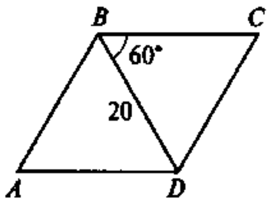



Рис. 55

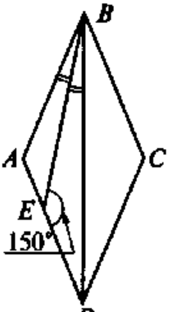



Рис. 56

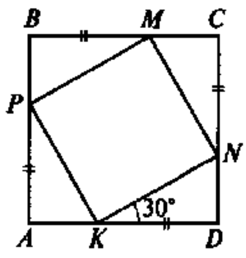



Рис. 57

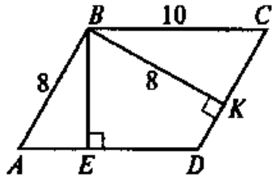



Рис. 58

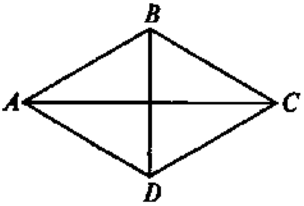


Рис. 59

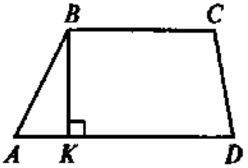


Рис. 60

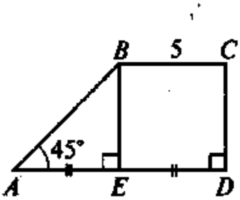


Рис. 61

9) *Дано: ABCD* – трапеция (рис. 61).
*Найти:* $S_{ABCD}$.
10) *Дано: ABCD* – трапеция (рис. 62).
*Найти:* $S_{ABCD}$.
11) *Дано:* $\cup AD = 80°$ (рис. 63).
*Найти:* Углы четырехугольника *ABCD*.
12) *Дано: M, N, K, P* – точки касания, $BC = 5$ (рис. 64).
*Найти:* $AB + CD$.
13) *Дано: ABCD* – правильный четырехугольник (рис. 65).
*Найти: AD* и *r*.
14) *Дано: ABCDEF* – правильный шестиугольник (рис. 66).
*Найти: AB, AC.*
15) *Дано: ABCDEF* – правильный шестиугольник (рис. 67).
*Найти:* *R* и $S_{ABCDEF}$.

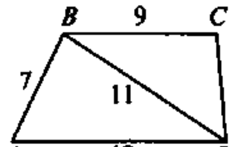


Рис. 62

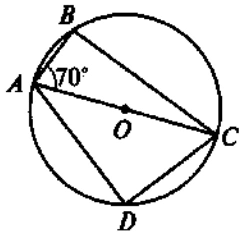


Рис. 63

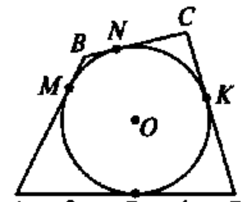


Рис. 64

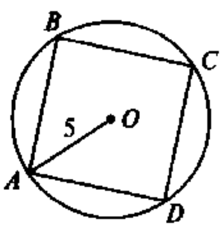


Рис. 65

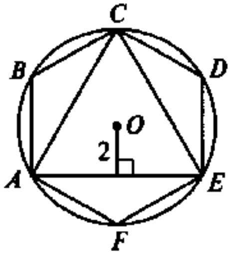


Рис. 66

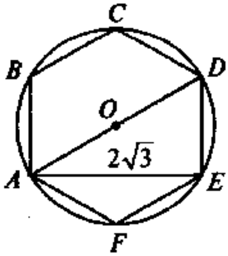


Рис. 67

***Ответы к задачам по готовым чертежам:***

1) $MN = 4\sqrt{3}$. 2) $\angle CBE = 15°$. 3) $AC = 20\sqrt{3}$. 4) $\angle BCD = 140°$. 5) $P_{MNKP} = (\sqrt{3} - 1) \cdot 8$. 6) $BE = 6{,}4$. 7) $BD = 8$. 8) $BC = 8$; $AD = 12$. 9) $S = 37{,}5$. 10) $S_{ABCD} = 21\sqrt{10}$. 11) $\angle C = 60°$, $\angle A = 120°$, $\angle B = \angle D = 90°$. 12) $AB + CD = 14$. 13) $AD = 5\sqrt{2}$; $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 14) $AB = 4$; $AC = 4\sqrt{3}$. 15) $R = 2$; $S_{ABCDEF} = 6\sqrt{3}$.

2. Решить текстовые задачи.

(Текстовые задачи решают более подготовленные учащиеся.)

1) В равнобокой трапеции боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

2) В параллелограмме $KMNP$ угол $M$ равен 120°, $KM = 8$, $KP = 10$. Найдите расстояния от вершин $M$ и $P$ до биссектрисы угла $MKP$.

3) Высота ромба делит его сторону пополам. Найдите углы ромба.

4) Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка $N$ так, что треугольник $BNC$ равносторонний. Найдите угол $NAD$.

5) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла $A$ пересекает сторону $BC$ в точке $F$ и продолжение стороны $CD$ за точку $C$ – в точке $E$. Найдите периметр параллелограмма, если $BF = 2$ см, $EC = 3$ см.

6) В трапеции $ABCD$ $AD$ – большее основание, $CK$ – высота, $AB = 5$ см. На отрезке $AK$ взята точка $E$ так, что $AE = 3$ см, $EK = 6$ см, $KD = 1$ см, $BE = 4$ см. Найдите площадь трапеции.

7) В треугольнике $ABC$ угол $A$ тупой, $BK$ и $CD$ – высоты, $BK = 12$ см, $AK = 9$ см, $CD = 10$ см. Найдите $AD$.

8) В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, диагональ $BD$ перпендикулярна стороне $AB$. Прямая, проходящая через середину отрезка $BD$ – точку $M$, параллельно $AD$, пересекает сторону $AB$ в точке $K$, $MK = 4$ см. Найдите площадь треугольника $AMD$.

9) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Известно, что площади треугольников $ABD$ и $ACD$ равны, а площади треугольников $ACD$ и $BCD$ не равны. Докажите, что данный четырехугольник является трапецией.

10) Около правильного треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Радиус большей окружности равен $4\sqrt{3}$ см. Найдите радиус меньшей окружности.

11) Периметр правильного четырехугольника, вписанного в окружность, на $16(\sqrt{2} - 1)$ см меньше периметра правильного четырехугольника, описанного около этой же окружности. Найдите радиус окружности.

*Ответы к текстовым задачам:*

1) 60°; 120°; 120°; 60°. 2) 4; 5. 3) 60°; 120°; 60°; 120°. 4) $\angle NAD = 15°$. 5) $P = 14$ см. 6) 32 см$^2$. 7) 7,5 см. 8) $4\sqrt{3}$ см$^2$. 10) $2\sqrt{3}$ см. 11) $2\sqrt{2}$ см.

*Критерии оценивания решения задач по готовым чертежам:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 11–15 баллов;
- оценка «4» – 8–10 баллов;
- оценка «3» – 6–7 баллов;
- оценка «2» – менее 6 баллов.

*Критерии оценивания решения текстовых задач:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 8–11 баллов;
- оценка «4» – 6–7 баллов;
- оценка «3» – 4–5 баллов;
- оценка «2» – менее 4 баллов.

### V. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

(Общая оценка за урок ставится как среднее арифметическое оценок за выполнение теоретического теста, за решение задач по готовым чертежам или за решение текстовых задач.)

### Домашнее задание

1. Повторить главы IX, X, XIII учебника.
2. Решить задачи, с которыми ученик не справился на уроке.

## Урок 69. Повторение по темам «Векторы», «Метод координат», «Движения»

***Основные дидактические цели урока:*** систематизировать теоретические знания по теме урока; совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Актуализация знаний учащихся

(Повторение теоретических сведений проводится с использованием пп. 8, 9, 11 Приложения (см. с. 377–379). Учитель дает 5 мин на повторение.)

**III. Решение простейших задач на применение теории**

Работа в парах с последующей проверкой.

1. *Дано:* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{e}| = 5$; $|\vec{c}| = 7$; $|\vec{d}| = 3$ (рис. 68).

*Укажите:*

а) коллинеарные векторы;

б) сонаправленные векторы;

в) противоположно направленные векторы;

г) равные векторы;

д) нулевые векторы.

*Найдите:* Длины векторов $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{d} + \vec{e}$.

*Постройте векторы:*

а) $\vec{b} + \vec{d}$ по правилу треугольника;

б) $\vec{a} + \vec{e}$ по правилу параллелограмма;

в) $\vec{c} - \vec{d}$;

г) $2\vec{e}$; $\frac{1}{3}\vec{c}$; $-3\vec{d}$; $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

2. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $K \in BC$, $BK : KC = 2 : 1$, $M$ – середина $CD$ (рис. 69).

*Разложите* векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

3. *Дано:* $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$, $C(-1; -3)$.

*Найдите*:

а) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$;

б) длину вектора $\overrightarrow{BC}$;

в) координаты середины отрезка $AC$;

г) расстояние между точками $A$ и $B$.

4. *Дано:* $\vec{a}\{3; -4\}$, $\vec{b}\{-2; 4\}$.

*Найдите:*

а) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;

б) $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$;

в) $\vec{m} = 3\vec{a}$;

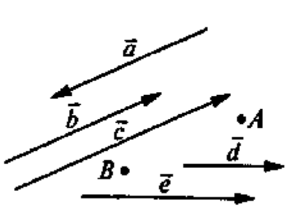



**Рис. 68**

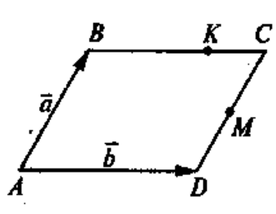



**Рис. 69**

г) $\vec{n} = -\frac{1}{2}\vec{b}$;

д) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. *Дано:* $\vec{a}\{2; -5\}$ и $\vec{b}\{-10; y\}$.

При каком значении векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

6. Дан треугольник $ABC$. Постройте его образ при:

а) осевой симметрии относительно прямой $AB$;

б) центральной симметрии относительно точки $C$;

в) параллельном переносе на вектор $\overline{AM}$, где $M$ – середина стороны $BC$;

г) повороте вокруг точки $A$ на 45° по часовой стрелке.

**IV. Самостоятельное решение тестовых задач**

1. $ABCD$ и $ADEF$ – параллелограммы, имеющие общую сторону. Постройте вектор $\vec{x}$ такой, что:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \vec{x} = \overrightarrow{DE}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DA} + \vec{x} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC}$.

2. На стороне $CD$ и диагонали $AC$ параллелограмма $ABCD$ лежат точки $P$ и $E$ так, что $DP : PC = 3 : 2$, $AE : EC = 4 : 3$. Выразите вектор $\overline{EP}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

3. В треугольнике $MNK$ $O$ – точка пересечения медиан, $\overline{MN} = \vec{x}$, $\overline{MK} = \vec{y}$, $\overline{MO} = k \cdot (\vec{x} + \vec{y})$. Найдите число $k$.

4. На окружности с центром $O$ постройте такие точки, что:

а) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$;

б) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$;

в) $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$.

5. Докажите, что если для четырехугольника $ABCD$ и произвольной точки $O$ выполняется равенство $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, то этот четырехугольник – параллелограмм.

6. Докажите, что четырехугольник $MNKP$, заданный координатами своих вершин $M(2; 2)$, $N(5; 3)$, $K(6; 6)$, $P(3; 5)$, является ромбом и вычислите его площадь.

7. Найдите координаты точки $N$, лежащей на оси абсцисс и равноудаленной от точек $P(-1; 3)$ и $K(0; 2)$.

8. В равнобедренном треугольнике основание равно 12 см, а высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.

9. Определите значение $x$, при котором вектор $\vec{a}\{2 - x; 2x + 3\}$ и вектор $\vec{b}\{-2; 5\}$:

а) коллинеарны;

б) перпендикулярны.

10. Используя метод координат, решите систему уравнений.

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4,\\(x-9)^2+(y-8)^2=64.\end{cases}$$

11. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD = 5$, $BC = CD = 3\sqrt{2}$, $AC = 7$. Используя метод координат, найдите расстояние между серединами противолежащих сторон четырехугольника.

*Ответы к тестовым задачам:*

1. а) $\vec{x} = \overline{DA}$; б) $\vec{x} = \vec{0}$. 2. $\overline{EP} = \frac{1}{35}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$. 3. $k = \frac{1}{3}$. 4. а) $AB$ – диаметр; б) $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 120°$; $OC$ – биссектриса $\angle OAB$; в) $\angle OAB = 60°$; $C$ – любая точка окружности. 6. $S = 8$. 7. $N(-3; 0)$. 8. $\sqrt{97}$. 9. а) $x = 16$; б) $x = -\frac{11}{12}$. 10. (2,6; 3,2). 11. $\frac{\sqrt{85}}{2}$.

*Критерии оценивания:*

За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.

- оценка «5» – 8–11 баллов;
- оценка «4» – 6–7 баллов;
- оценка «3» – 4–5 баллов;
- оценка «2» – менее 4 баллов.

### V. Рефлексия учебной деятельности

(Учитель разбирает задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.)

### Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился на уроке.

## Урок 70. Контрольная работа № 6 (итоговая)

***Основная дидактическая цель урока:*** проверить знания, умения и навыки учащихся по курсу геометрии за 7–9 классы.

## Ход урока

### I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности

### II. Контрольная работа

***Вариант 1***

**Часть I**

При выполнении заданий 1–5 выберите верный ответ.

1. Треугольник со сторонами 5, 9, 15:

а) остроугольный;

б) тупоугольный;

в) прямоугольный;

г) такого треугольника не существует.

2. Если одна из сторон треугольника на 3 см меньше другой, высота делит третью сторону на отрезки 5 см и 10 см, то периметр треугольника равен:

| | |
|---|---|
| а) 25 см | в) 32 см |
| б) 40 см; | г) 20 см. |

3. Если один из углов ромба равен 60°, а диагональ, проведенная из вершины этого угла, равна $4\sqrt{3}$ см, то периметр ромба равен:

| | |
|---|---|
| а) 16 см; | в) 12 см; |
| б) 8 см; | г) 24 см. |

4. Величина одного из углов треугольника равна 20°. Найдите велнчину острого угла между биссектрисами двух других углов треугольника.

| | |
|---|---|
| а) 84°; | в) 80°; |
| б) 92°; | г) 87°. |

5. В треугольнике $ABC$ сторона $a = 7$, сторона $b = 8$, сторона $c = 5$. Вычислите $\angle A$.

| | |
|---|---|
| а) 120°; | в) 30°; |
| б) 45°; | г) 60°. |

**Часть II**

При выполнении заданий 6–10 запишите подробное решение.

6. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания со вписанной окружностью в отношении 8 : 5, считая от вершины, лежащей против основания. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

7. В треугольнике $BCE$ $\angle C = 60°$, $CE : BC = 3 : 1$. Отрезок $CK$ – биссектриса треугольника. Найдите $KE$, если радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{3}$.

8. Найдите площадь треугольника $KMP$, если сторона $KP$ равна 5, медиана $PO$ равна $3\sqrt{2}$, $\angle KOP = 135°$.

9. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

10. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$, касается катетов $AC$ и $BC$ соответственно в точках $E$ и $D$. Найдите величину угла $ABC$ (в градусах), если известно, что $AE = 1$, $BD = 3$.

***Вариант 2***

**Часть I**

При выполнении заданий 1–5 выберите верный ответ.

1. Треугольник со сторонами 15, 9, 12:

а) остроугольный;

б) тупоугольный;

в) прямоугольный;

г) такого треугольника не существует.

2. Если сходственные стороны подобных треугольников равны 2 см и 5 см, площадь первого треугольника равна 8 см$^2$, то площадь второго треугольника равна:

| | |
|---|---|
| а) 50 см$^2$; | в) 60 см$^2$; |
| б) 40 см$^2$; | г) 20 см$^2$. |

3. Если в равнобедренном треугольнике длина основания равна 12 см, а его периметр равен 32 см, то радиус окружности, вписанной в треугольник, равен:

| | |
|---|---|
| а) 4 см; | в) 6 см; |
| б) 3 см; | г) 5 см. |

4. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найдите катеты треугольника.

| | |
|---|---|
| а) 12 см и 16 см; | в) 10 см и 13 см; |
| б) 7 см и 11 см; | г) 8 см и 15 см. |

5. Стороны прямоугольника равны $a$ и $k$. Найдите радиус окружности, описанной около этого прямоугольника.

| | |
|---|---|
| а) $\frac{a^2}{k}$; | в) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+k^2}$; |
| б) $\frac{k^2}{a}$; | г) $\sqrt{a^2+k^2}$. |

**Часть II**

При выполнении заданий 6–10 запишите подробное решение.

6. Окружность с центром $O$, вписанная в равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC$, касается стороны $BC$ в точке $K$, причем $CK : BK = 5 : 8$. Найдите площадь треугольника, если его периметр равен 72.

7. Около треугольника $ABC$ описана окружность. Медиана треугольника $AM$ продлена до пересечения с окружностью в точке $K$. Найдите сторону $AC$, если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

8. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30°, а взятая внутри треугольника

точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания.

9. Пусть $M$ – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором стороны $AB$, $AD$ и $BC$ равны между собой. Найдите угол $CMD$ (в градусах), если известно, что $DM = MC$, а угол $CAB$ не равен углу $DBA$.

10. На боковой стороне $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$ как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке $D$. Найдите квадрат расстояния от вершины $A$ до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол $ABC$ равен 120°.

***Ответы к задачам контрольной работы:***

| | Часть I | | | | | Часть II | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ***Вариант 1*** | г | б | а | в | г | 30 | 18 | 3 | 25 | 30 |
| ***Вариант 2*** | в | а | б | г | в | 240 | 15 | 24 | 120 | 7 |

### III. Рефлексия учебной деятельности

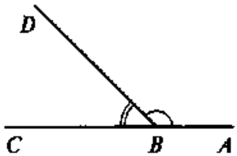
В конце урока учитель раздает на каждую парту ответы к задачам контрольной работы.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

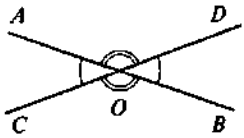
## Обобщающие сведения

### 1. Параллельные прямые и углы

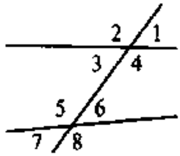
***Углы, образованные при пересечении прямых***




$\angle ABD$ и $\angle CBD$ – смежные;
$\angle ABD + \angle CBD = 180°$

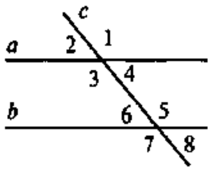



$\angle AOC$ и $\angle DOB$ – вертикальные;
$\angle AOD$ и $\angle BOC$ – вертикальные;
$\angle AOC = \angle DOB$;
$\angle AOD = \angle BOC$



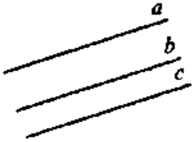

$\angle 1$ и $\angle 6$, $\angle 2$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ – соответственные;
$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ – односторонние;
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ – накрест лежащие

***Свойства параллельных прямых***

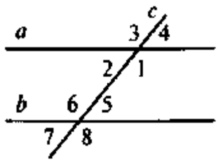



Если $a \parallel b$, $c$ – их секущая, то:
1) $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$ (соответственные углы равны);
2) $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$ (накрест лежащие углы равны);
3) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ (сумма односторонних углов равна 180°)

***Признаки параллельности прямых***




Если $a \parallel b$ и $c \parallel b$, то $a \parallel c$

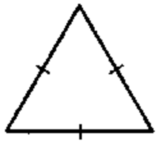
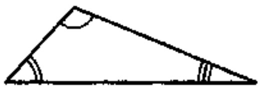
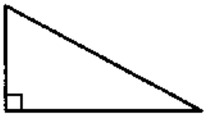
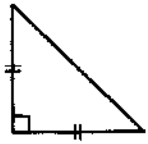


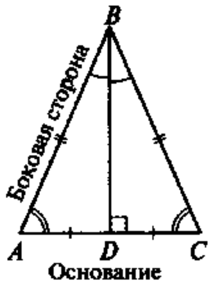

Если $a \cap c$, $b \cap c$ и
1. $\angle 1 = \angle 6$ ($\angle 2 = \angle 5$), то $a \parallel b$.
2. $\angle 4 = \angle 5$ ($\angle 3 = \angle 6$, $\angle 2 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 8$), то $a \parallel b$.
3. $\angle 1 + \angle 5 = 180°$ ($\angle 2 + \angle 6 = 180°$), то $a \parallel b$

***Аксиома параллельности прямых***

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

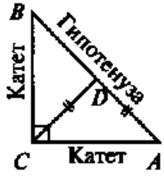
## 2. Треугольники

| Треугольники | Разносторонние | Равнобедренные | Равносторонние |
|---|---|---|---|
| Остроугольные |  |  |  |
| Тупоугольные |  |  | – |
| Прямоугольные |  |  | – |




***Свойства равнобедренного треугольника***

1. $AB = BC$.
2. $\angle A = \angle C$.
3. $BD$ – медиана, высота, биссектриса.

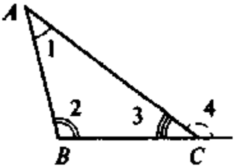



***Свойства прямоугольного треугольника***

1. $\angle A + \angle B = 90°$;
2. Если $\angle B = 30°$, то $AC = \frac{1}{2}AB$

(если $\angle A = 30°$, то $BC = \frac{1}{2}AB$);

3. Если $CD$ – медиана, то $CD = BD = AD$;
4. Если $CD$ – медиана и $CD = BD = AD$,
то $\Delta ABC$ – прямоугольный.

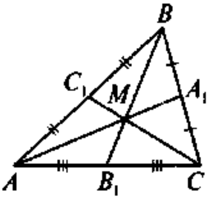



***Соотношение между сторонами и углами треугольника***

1. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$;
2. Если $\angle 1 < \angle 3 < \angle 2$, то $BC < AB < AC$;
3. $AB < BC + AC$, $BC < AB + AC$, $AC < AB + BC$;
4. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

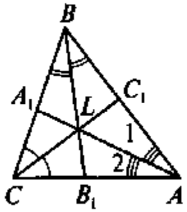
***Медиана***

$AA_1$ – медиана, если $BA_1 = CA_1$.



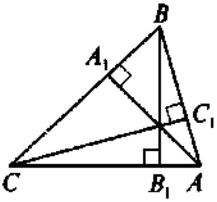

***Биссектриса***

$AA_1$ – биссектриса, если $\angle 1 = \angle 2$.

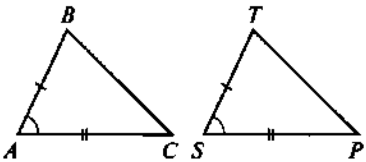
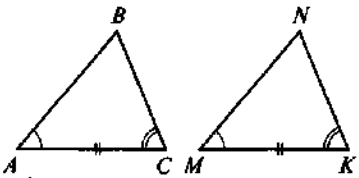
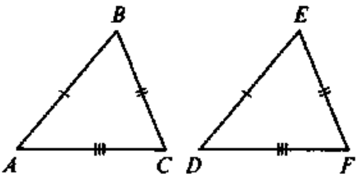



***Высота***

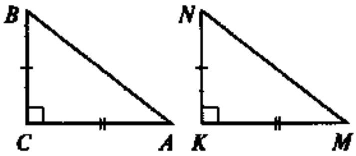
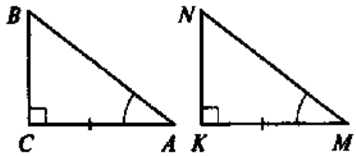
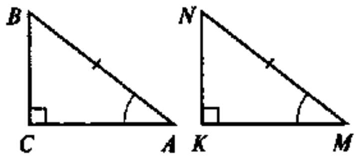
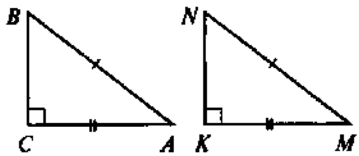
$AA_1$ – высота, если $AA_1 \perp BC$.




## 3. Признаки равенства треугольников

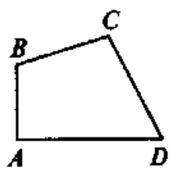
| | | |
|---|---|---|
| По двум сторонам и углу между ними |  | $\Delta ABC = \Delta STP$, если:<br>1. $AB = ST$;<br>2. $AC = SP$;<br>3. $\angle A = \angle S$ |
| По стороне и двум прилежащим к ней углам |  | $\Delta ABC = \Delta MNK$, если:<br>1. $AC = MK$;<br>2. $\angle A = \angle M$;<br>3. $\angle C = \angle K$ |
| По трем сторонам |  | $\Delta ABC = \Delta DEF$, если:<br>1. $AB = DE$;<br>2. $BC = EF$;<br>3. $AC = DF$ |

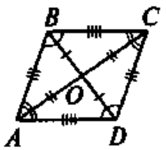
## 4. Признаки равенства прямоугольных треугольников

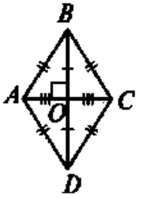
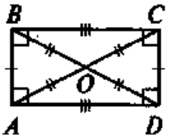
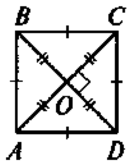
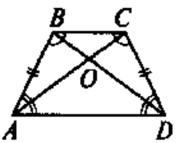
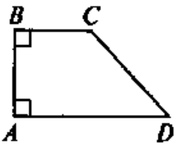
| | | |
|---|---|---|
| По двум катетам |  | $\Delta ABC = \Delta MNK$, если:<br>1. $BC = NK$;<br>2. $AC = MK$ |
| По катету и прилежащему к нему острому углу |  | $\Delta ABC = \Delta MNK$, если:<br>1. $AC = MK$;<br>2. $\angle A = \angle M$ |
| По гипотенузе и острому углу |  | $\Delta ABC = \Delta MNK$, если:<br>1. $AB = MN$;<br>2. $\angle A = \angle M$ |
| По гипотенузе и катету |  | $\Delta ABC = \Delta MNK$, если:<br>1. $AB = MN$;<br>2. $AC = MK$ |

## 5. Четырехугольники

***Выпуклый четырехугольник***
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

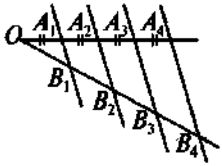



| Определение | Свойства | Признаки |
|---|---|---|
| ***Параллелограмм*** | | |
| <br>$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ | 1. $AO = CO$, $BO = DO$, $O = AC \cap BD$.<br>2. $AB = CD$, $BC = AD$.<br>3. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.<br>4. $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180°$ | $ABCD$ – параллелограмм, если:<br>1. $AB = CD$, $AB \parallel CD$ или $BC = AD$, $BC \parallel AD$.<br>2. $AB = CD$, $BC = AD$.<br>3. $AC \cap BD = O$, $AO = CO$, $BO = DO$ |

| Определение | Свойства | Признаки |
|---|---|---|
| | ***Ромб*** | |
| <br>$ABCD$ — параллелограмм, $AB =$ $= BC = CD = DA$ | 1. $AC \perp BD$.<br>2. $AC$ — биссектриса $\angle A$ и $\angle C$, $BD$ — биссектриса $\angle B$ и $\angle D$.<br>Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма | $ABCD$ — ромб, если:<br>1. $ABCD$ — параллелограмм и $AC \perp BD$.<br>2. $ABCD$ — параллелограмм и $AC$ и $BD$ — биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.<br>3. $AB = BC = CD = DA$ |
| | ***Прямоугольник*** | |
| <br>$ABCD$ — параллелограмм, $\angle A =$ $= \angle B = \angle C = \angle D$ | 1. $AC = BD$.<br>2. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма | $ABCD$ — прямоугольник, если:<br>1. $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$.<br>2. $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$ ($\angle B$, $\angle C$, $\angle D$).<br>3. $\angle A = \angle B = \angle C = 90°$ |
| | ***Квадрат*** | |
| <br>$ABCD$ — прямоугольник, $AB = BC = CD = DA$ | Квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника | $ABCD$ — квадрат, если:<br>1. $ABCD$ — прямоугольник и $AC \perp BD$.<br>2. $ABCD$ — ромб и $AC = BD$.<br>3. $ABCD$ — ромб и $\angle A = 90°$.<br>4. $ABCD$ — прямоугольник и $AC$ и $BD$ — биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ |
| | ***Трапеция*** | |
| <br>$BC \parallel AD$, $AB$ не параллельна $CD$.<br>$MN = 0{,}5(BC + AD)$.<br>$\Delta AOD \sim \Delta COB$ | Равнобокая трапеция:<br>$AC = BD$,<br>$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$<br><br>Прямоугольная трапеция:<br>$\angle A = \angle D = 90°$,<br>$\angle C$ — тупой,<br>$\angle D$ — острый | <br> |

***Теорема Фалеса***

Если $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$
и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$,
то $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.



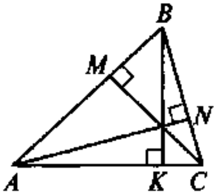

## 6. Площади фигур

***Площадь треугольника***

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK.$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B =$

$= \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin C.$



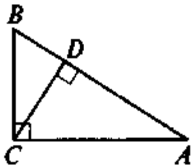
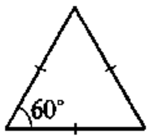
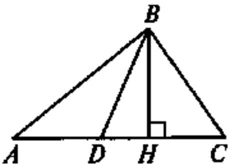
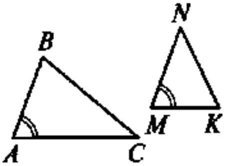
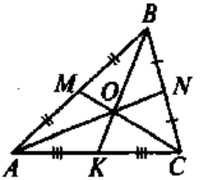

***Формула Герона***

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

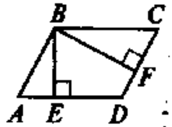
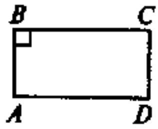
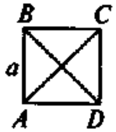
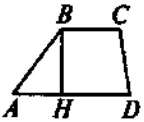
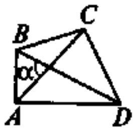
где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + AC)$.

$S = rp$, где $r$ – радиус вписанной окружности.

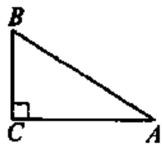
$S = \frac{abc}{4R}$, где $R$ – радиус описанной окружности.

| | |
|---|---|
| $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$, $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$  | $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  |
| $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{DC}$  | $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$  |
| $S_{AOM} = S_{BOM} = S_{BON} = S_{CON} = S_{AOK} = S_{COK}$  | |

***Площади четырехугольников***

| | | |
|---|---|---|
| Параллелограмм |  | $S = AD \cdot BE = CD \cdot BF.$<br>$S = AB \cdot AD \cdot \sin A = BA \cdot BC \cdot \sin B$ |
| Прямоугольник |  | $S = AB \cdot BC$ |
| Ромб |  | $S = 0{,}5 \cdot AC \cdot BD.$<br>$S = AB^2 \cdot \sin A = AB^2 \cdot \sin B.$<br>$S = AB \cdot AH$ |
| Квадрат |  | $AC = d.$<br>$S = a^2.$<br>$S = 0{,}5 \cdot d^2$ |
| Трапеция |  | $S = 0{,}5 \cdot BH \cdot (BC + AD)$ |
| Выпуклый четырехугольник |  | $S = 0{,}5 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$ |

***Теорема Пифагора***
$AB^2 = AC^2 + BC^2.$
Если $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $\Delta ABC$ – прямоугольный.




## 7. Подобные треугольники

***Определение***

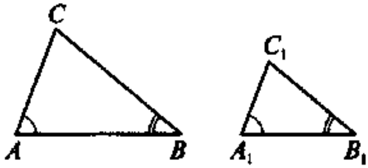
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = k;\ \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{{A_1B_1}^2} = k^2.$$

***Признаки подобия треугольников***

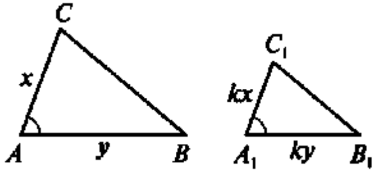
**I признак**

Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



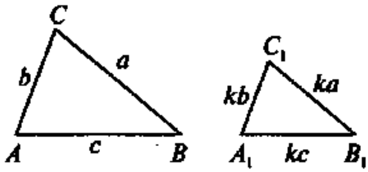

**II признак**

Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$, $\angle A = \angle A_1$,
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



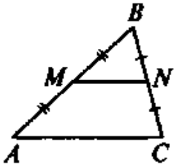

**III признак**

Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$,
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

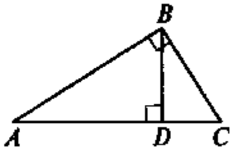



***Применение подобия***

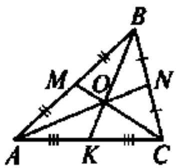
$MN$ – средняя линия треугольника.
$MN \parallel AC$, $MN = 0{,}5AC$.



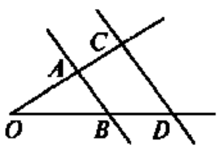

$BD = \sqrt{AD \cdot DC}$.
$AB = \sqrt{AD \cdot AC}$.
$BC = \sqrt{CD \cdot AC}$.
$\Delta ABD \sim \Delta BCD \sim \Delta ACB$.




$AN \cap BK \cap CM = O$.
$\dfrac{AO}{NO} = \dfrac{BO}{KO} = \dfrac{CO}{MO} = \dfrac{2}{1}$



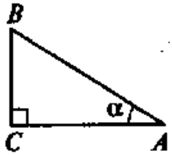

Если $AB \parallel CD$, то $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{AC}{BD}$.



***Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника***

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$; $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

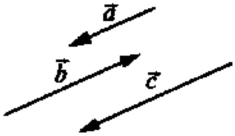
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



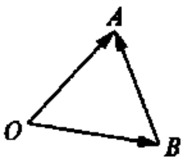

| | **30°** | **45°** | **60°** |
|---|---|---|---|
| **sin α** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| **cos α** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **tg α** | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

## 8. Векторы

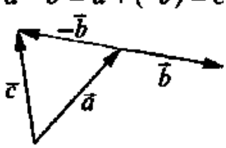
***Вектор*** – направленный отрезок.
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – коллинеарные.
$\vec{a}, \vec{c}$ – сонаправленные.
$\vec{a}, \vec{b}$ – противоположно направленные.
$\vec{a} = \vec{b}$, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.



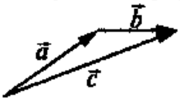

***Вычитание векторов***
$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$.




$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$

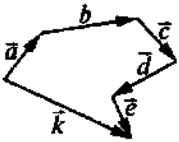



***Сложение векторов***
1. Правило треугольника.




$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.
2. Правило параллелограмма.


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.
3. Правило многоугольника.




$\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$

***Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$***

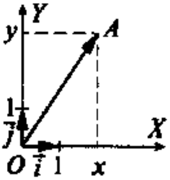
$\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где $x$, $y$ — коэффициенты разложения

***Умножение вектора на число***

$k > 0 \Rightarrow (k \cdot \vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$, $|k \cdot \vec{a}| = k \cdot |\vec{a}|$.

$k < 0 \Rightarrow (k \cdot \vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$, $|k \cdot \vec{a}| = k \cdot |\vec{a}|$

## 9. Метод координат




$\overline{OA}\ \{x; y\}$.

$\overline{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow$

$\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow$

$\vec{d}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$.

$\vec{e} = k \cdot \vec{a} \Rightarrow$

$\vec{e}\{k \cdot x_1; k \cdot y_1\}$

$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

$\overline{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Если $M(x; y)$ — середина $AB$,

то $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

***Уравнение окружности***

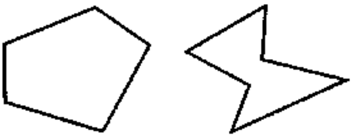
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$,
где $R$ — радиус окружности,
$(x; y)$ — точка окружности,
$(x_0; y_0)$ — центр окружности

***Уравнение прямой***

$ax + by + c = 0$

## 10. Многоугольники

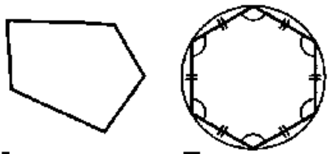
***Многоугольники***



Выпуклые Невыпуклые

***Выпуклые многоугольники***

Сумма углов равна $180° \cdot (n - 2)$.



Неправильные Правильные

***Правильные многоугольники***

Внутренний угол $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$. Внешний угол $\beta = \dfrac{360°}{n}$.

$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$. $r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$. $r = R\cos\dfrac{180°}{n}$. $S = \dfrac{1}{2}P \cdot r$

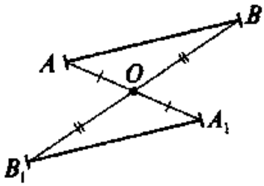
## 11. Движения

***Движение*** — отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками.

***Свойства движений***

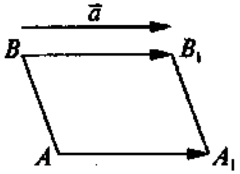
1. При движении отрезок отображается на отрезок.
2. При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.
3. При движении прямая отображается на прямую, луч — на луч,
а угол — на равный ему угол.

***Центральная симметрия***



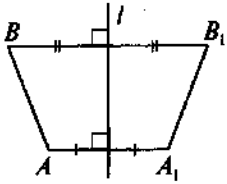

$O$ – центр симметрии

***Параллельный перенос***



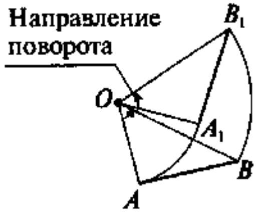

$\bar{a}$ – вектор параллельного переноса, $\overline{BB'} = \overline{AA'} = \bar{a}$

***Осевая симметрия***




$l$ – ось симметрии

***Поворот***




$\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha$, $\alpha$ – угол поворота, $O$ – центр поворота

# Содержание

## ГЛАВА XI. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



## ГЛАВА XII. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

## ГЛАВА XIII. ДВИЖЕНИЯ



## ГЛАВА XIV. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТЕРЕОМЕТРИИ



## ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ



## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Учебно-методическое издание*

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

**Гаврилова** Нина Федоровна

**ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО ГЕОМЕТРИИ**

к УМК Л.С. Атанасяна и др.
(*М.: Просвещение*)

**9 класс**

Выпускающий редактор *Юлия Антонова*
Дизайн обложки и верстка *Дмитрия Сахарова*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 967-19-26.
Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано в печать 14.07.2017.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Newton.
Усл. печ. листов 20,16. Тираж 5000 экз. Заказ №0627.

ООО «ВАКО». 129085, РФ, Москва, пр-т Мира, д. 101.

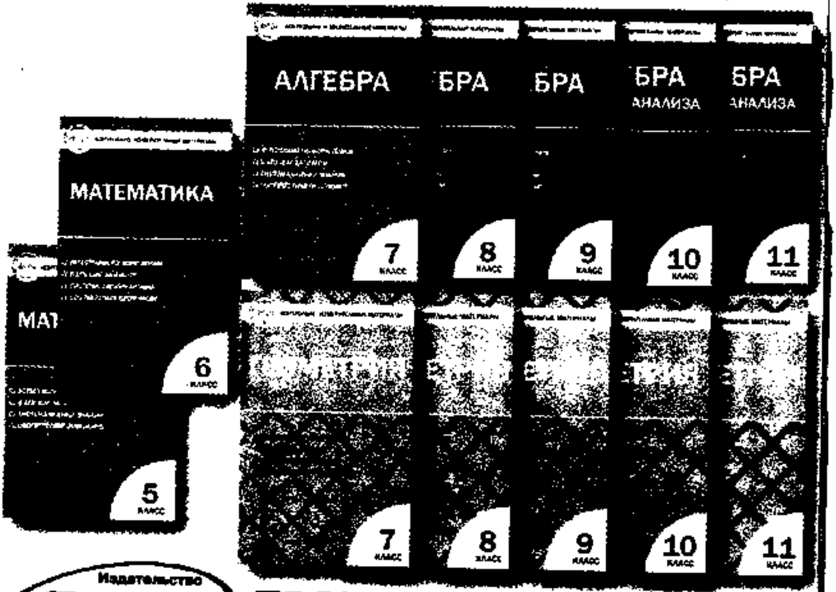
Отпечатано в полном соответствии с предоставленными материалами
в типографии ООО «Чеховский печатник».
142300, РФ, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Тел.: +7-915-222-15-42, +7-926-063-81-80.

## КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Легко, быстро и качественно проверить знания учащихся можно с помощью книг серии «Контрольно-измерительные материалы». Издательство «Вако» предлагает вашему вниманию пособия, в которые включены тематические тесты в формате ЕГЭ. Издания допущены к использованию в образовательном процессе в соответствии с приказом Министерства образования и науки РФ от 09.06.2016 № 699.

Контрольно-измерительные материалы составлены в соответствии с требованиями программы для общеобразовательной школы. Тесты и задания расположены в порядке изучения тем. По материалам пособий можно контролировать знания и навыки учащихся систематически, последовательно, с усложнением содержания и приемов проверки, а также обучать школьников работе с заданиями государственной аттестации и ЕГЭ.

- ☑ **ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ В ФОРМАТЕ ЕГЭ**
- ☑ **УДОБНЫЙ ФОРМАТ И НАВИГАЦИЯ**
- ☑ **СОВРЕМЕННАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ**
- ☑ **СООТВЕТСТВИЕ ПРОГРАММНЫМ ТРЕБОВАНИЯМ**




Издательство Вако

**ПРОВЕРИТЬ ЗНАНИЯ ЛЕГКО**